SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Damjan Čiča

Zagreb, godina. 2015.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentori:

Prof. dr. sc. Nedeljko Štefanić, dipl. ing.
Dr. sc. Hrvoje Cajner, dipl. ing.

Student:

Damjan Čiča

Zagreb, godina. 2015.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svome mentoru, prof.dr.sc. Nedeljku Štefaniću i asistentu dr.sc. Hrvoju Cajneru na pomoći i danim savjetima prilikom izrade rada.

Najviše se zahvaljujem svojoj obitelji na razumijevanju, pomoći i podršci tijekom cijeloga školovanja.

Damjan Čiča

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE
Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo materijala i mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum: 26 -02- 2015	Prilog
Klasa: 602-04/15-6/3	
Ur.broj: 15-1703-15-129	

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **DAMJAN ČIČA** Mat. br.: 0036456568

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Analiza postojećeg stanja proizvodnog procesa uporabom statističkih metoda**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Analysis of current state of the production process using statistical methods**

Opis zadatka:

Analizom postojećeg stanja proizvodnog procesa utvrđuje se mogućnost samog procesa da zadovolji tržišne zahtjeve prema krajnjim korisnicima ili partnerima u industriji. Statističke metode za analizu stanja procesa sastoje se, što od jednostavnijih, što kompleksnijih metoda, a sve u cilju analize mogućnosti poboljšanja. U radu je potrebno staviti naglasak na metode procjene distribucije promatrane varijable te pronalaženja uzroka (izvora) varijacije uporabom "ANOVA" metode te kao rezultat primjene predložiti mogućnosti unaprjeđenja.

Također je potrebno:

1. Temeljito objasniti pojmove vezane za statističku analizu procesa.
2. Posebice se osvrnuti na teoriju prilagodbe određene distribucije empirijskim podacima te testiranje adekvatnosti iste.
3. Detaljno objasniti ANOVA metodu gdje se pojavljuju jedan ili više promjenjivih faktora.
4. Upotrijebiti navedene metode na problemu iz konkretnog proizvodnog sustava te dati prijedlog poboljšanja.

Zadatak zadan:
25. studenog 2014.

Rok predaje rada:
1. rok: 26. veljače 2015.
2. rok: 17. rujna 2015.

Predviđeni datumi obrane:
1. rok: 2., 3. i 4. ožujka 2015.
2. rok: 21., 22. i 23. rujna 2015.

Zadatak zadao:
Prof. dr. sc. Nedeljko Štefanić

Predsjednik Povjerenstva:
Prof. dr. sc. Zoran Kunica

SADRŽAJ

POPIS SLIKA

POPIS TABLICA

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
$\bar{x}$		Aritmetička sredina
H		Harmonijska sredina
G		Geometrijska sredina
$\bar{x}_r$		Moment
M_o		Mod
M_e		Medijan
σ^2		Varijanca
σ		Standardna devijacija
V		Koeficijent varijacije
z_i		Standardizirano obilježje
R_x		Raspon varijacije
I_Q		Interkvartil
V_Q		Koeficijent interkvartilne devijacije
α_3		Mjera asimetrije
α_4		Mjera zaobljenosti
T		Tolerancijsko polje
C_p		Potencijalna sposobnost
$\hat{\sigma}$		Standardno odstupanje
C_r		Omjer sposobnosti
C_{pL}		Donja potencijalna sposobnost
C_{pU}		Gornja potencijalna sposobnost
k		Faktor korekcije necentriranosti
C_{pk}		Demonstrirana izvrsnost
s		Standardno odstupanje

Oznaka	Jedinica	Opis
M		Ciljana vrijednost
C_{pm}		Potencijalna sposobnost stroja
DF		Stupanj slobode kod χ^2 - testa nezavisnosti
$E_{r,c}$		Očekivana frekvencija
χ^2		Varijabla χ^2 - razdiobe
E_i		Očekivana frekvencija χ^2 - testa prikladnosti uzorka
D		Vrijednost Kolmogorov-Smirnov testa
A^2		Vrijednost Anderson-Darling testa
ε_{ij}		Slučajna odstupanja unutar uzorka
SKO_{UKUPNO}		Ukupna suma kvadrata odstupanja
$s^s_{između\ uzoraka}$		Srednji kvadrat odstupanja između uzoraka
$s^2_{unutar\ uzoraka}$		Srednji kvadrat odstupanja unutar uzoraka
F		Varijabla F-razdiobe
k_b		Stupanj slobode brojnika
k_n		Stupanj slobode nazivnika
F_0		Kritična vrijednost F-testa

SAŽETAK

Tema ovog rada je analiza postojećeg stanja proizvodnog sustava uporabom statističkih metoda. Kako je svrha svakog proizvodnog sustava zadovoljiti potrebe kupaca, to jest korisnika, vrlo je važno kontrolirati procese te težiti njihovom unaprjeđenju, s ciljem smanjenja troškova i povećanja kvalitete proizvoda, a i samog procesa. U ovom je radu stavljen naglasak na prilagodbu određene distribucije empirijskim podacima te identifikaciju izvora varijacije putem analize varijance.

U prvom je poglavlju dan općeniti uvod u samu statistiku, njenu podjelu i način prikazivanja podataka. Isto tako su temeljito objašnjeni osnovni statistički pojmovi te je prikazan način njihovog izračuna. U poglavlju statističke analize procesa naglasak je na važnost provedbe same analize u cilju reduciranja otpadnog materijala (nesukladnosti), drastičnog smanjenja troškova proizvodnje te vremena izvođenja radnji. Varijacije u proizvodnji su također objašnjene u ovom radu, jer je cilj svakog proizvodnog sustava eliminacija svih različitosti u konačnim proizvodima. Objašnjene su vrste varijacija i njihovi uzroci. U poglavlju sposobnost procesa dan je detaljan pregled i način ocjenjivanja nekog procesa interpretacijom dobivenih vrijednosti pokazatelja sposobnosti. Tema sljedećeg poglavlja je kontrola same kvalitete proizvoda te 6σ metodologija. Neophodno je bilo objasniti primjenu svih navedenih metoda kontrole procesa na primjerima iz stvarne proizvodnje. U svrhu toga su predstavljene metode prilagodbe određene distribucije empirijskim podacima te testiranje adekvatnosti iste. Isto tako je objašnjena analiza varijance ANOVA u cilju pronalaska uzroka varijacija u proizvodnji. Zatim je na podacima o kontaktnom razmaku i pritisku kod različitih tipova sklopki provedena statistička analiza, određivanje indeksa sposobnosti procesa i ANOVA. Na temelju rezultata doneseni su zaključci o sposobnosti procesa te o uzrocima varijacija vrijednosti tih dviju karakteristika.

1. UVOD

Statistika je znanost o prikupljanju, analizi, tumačenju, prezentaciji i organizaciji različitih vrsta podataka [1]. To je posebna znanstvena disciplina koja na temelju određenih postupaka potrebnih za ostvarenje željenih ciljeva interpretira rezultate provedenih analiza. Kao jedna od osnovnih grana matematike, masovno se početka primjenjivati tek početkom 2. svjetskog rata [5]. Bavi se svim mogućim aspektima podataka, u smislu planiranja budućeg prikupljanja podataka koje će služiti kao osnova za dizajniranje istraživanja i eksperimenata.. Kao alati za takve procese koriste se dvije vrste studija: eksperimentalne studije te studije promatranja. Eksperimentalna studija predstavlja mjerenja sustava koji se proučava, manipulaciju istoga, te dodatna mjerenja koristeći iste postupke u cilju dobivanja informacija o tome kako manipulacija sustava utječe na rezultate mjerenja. Nasuprot tome je studija promatranja, koja ni na koji način ne manipulira sustavom ili utječe na isti.

Osnovne faze statističkog istraživanja su [4]:

- statističko promatranje
- grupiranje i obrada podataka (tablično i grafičko prikazivanje podataka)
- statistička analiza i interpretacija rezultata provedene analize.

Osnovna podjela statistike je na deskriptivnu i inferencijalnu statistiku.

1.1. Deskriptivna statistika

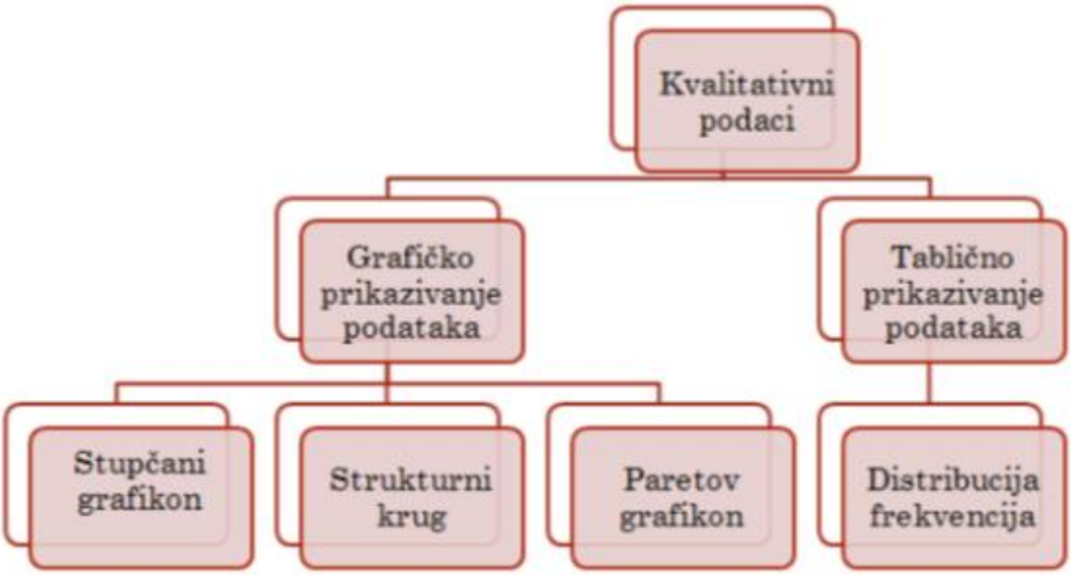
Deskriptivna statistika je disciplina kvantitativnog opisivanja glavnih značajki baze prikupljenih podataka [2]. Ona sažima podatke iz uzoraka koristeći indekse poput standardne i srednje devijacije. Od inferencijalne statistike se razlikuje po tome što je predmet njenog istraživanja uzorak, a o populaciji izravno ne govori ništa ili jako malo. Unatoč tome, valjano je donositi zaključke o populaciji na temelju uzoraka.

Grupiranje podataka se može vršiti na nekoliko načina:

- pisanje podataka u rastućem ili padajućem redoslijedu
- izrada tablica frekvencije – u prvom redu se prikazuju različiti podaci, a u drugom njihove frekvencije
- grupiranje podataka u razrede.

1.1.1. Uređivanje kvalitativnih podataka

Kvalitativni podaci dobiveni iz analize konačne populacije se prikazuju grafički ili tablično [Slika 1].



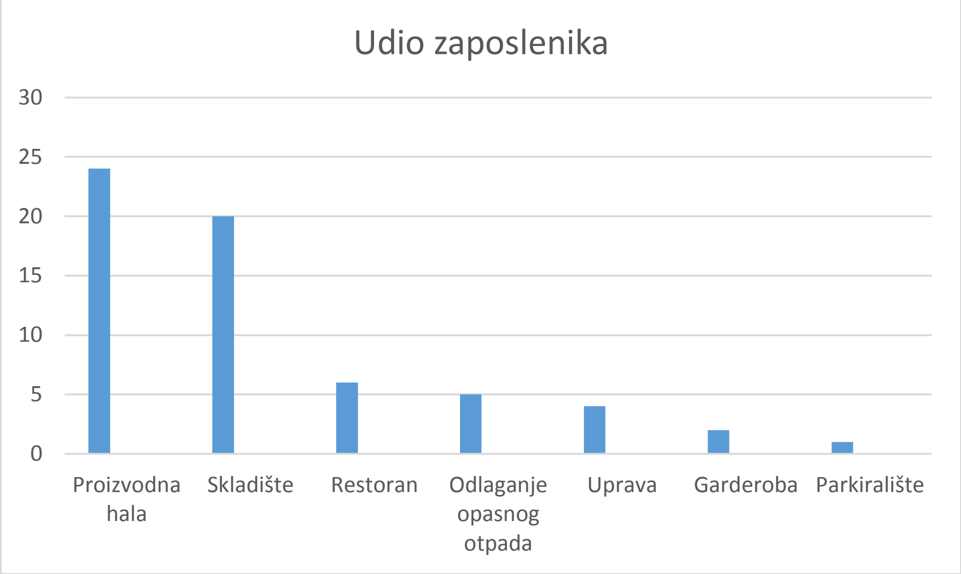
Slika 1. Načini prikazivanja kvalitativnih podataka [5]

Kako je jedan od najčešćih načina zadavanja kvalitativne varijable tablični prikaz distribucije frekvencija, na jednom će takvom primjeru biti objašnjeni prethodno navedeni načini prikazivanja podataka. U nekom proizvodnom sustavu postoji nekoliko odjela, te je u svakom od njih zaposlen određeni broj radnika [Tablica 1].

Tablica 1. Zaposlenici u proizvodnom sustavu

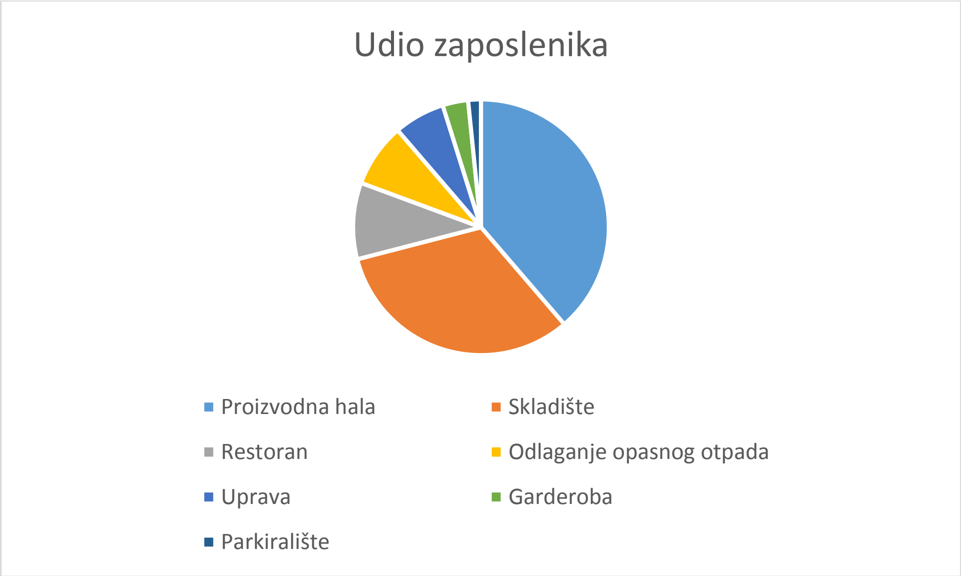
Odjel proizvodnog sustava	Broj zaposlenih (frekvencija)	Relativna frekvencija
Uprava	4	0,0645 = 6,45%
Proizvodna hala	24	0,3870 = 38,70%
Restoran	6	0,0968 = 9,68%
Garderoba	2	0,0323 = 3,23%
Skladište	20	0,3226 = 32,26%
Odlaganje opasnog otpada	5	0,0806 = 8,06%
Parkiralište	1	0,0161 = 1,61%

Prethodnom je tablicom zadana distribucija frekvencija normalne varijable koja djeluje na populaciji zaposlenih u proizvodnom sustavu na način da se svakom zaposleniku pridruži ime odjela na kojemu radi. Jedan od načina uređivanja takvih podataka je pomoću stupčanog grafikona [Slika 2].



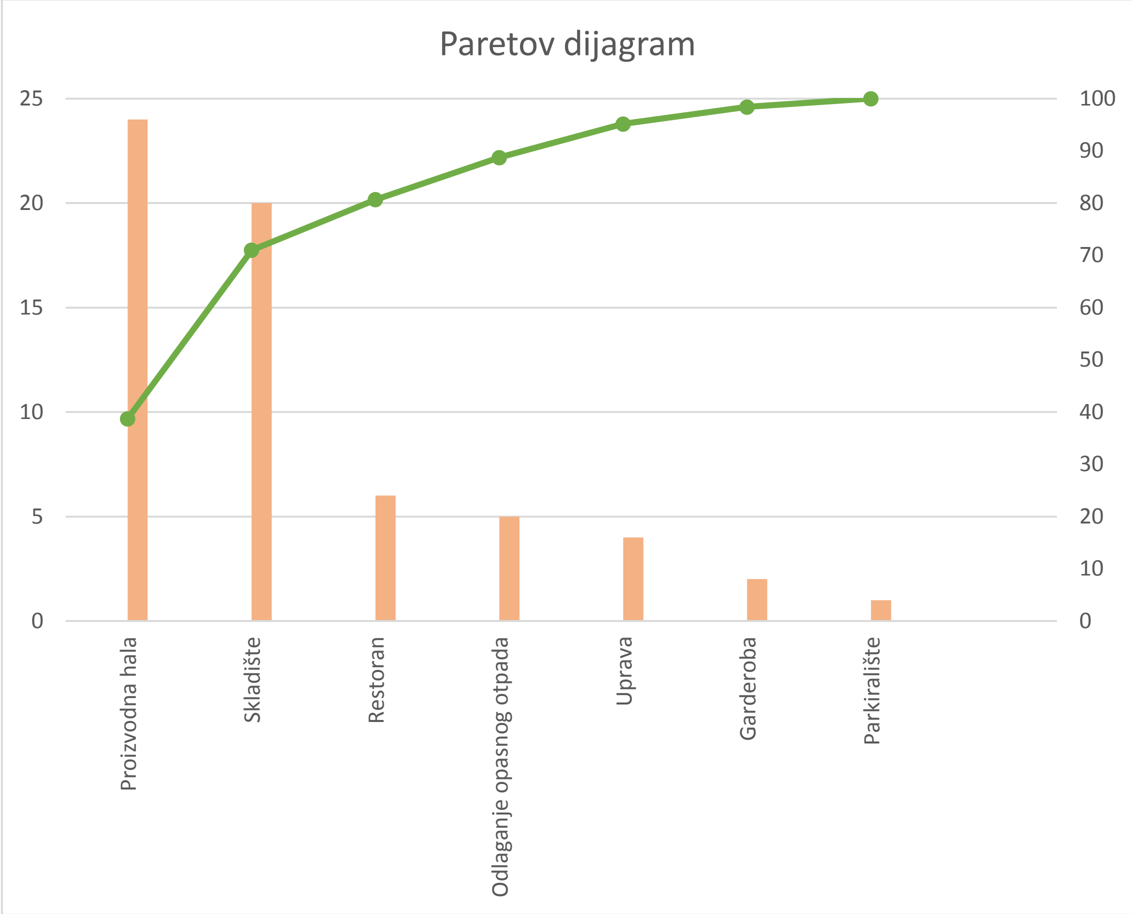
Slika 2. Stupčani grafikon zaposlenika u proizvodnom sustavu

Isto tako se koristi strukturni krug [Slika 3].



Slika 3. Strukturni krug zaposlenika u proizvodnom sustavu

Paretov dijagram [Slika 4] istovremeno prikazuje i frekvencije (poredane od veće prema manjoj) i kumulativne frekvencije.



Slika 4. Paretov dijagram zaposlenika u proizvodnom sustavu

Na temelju prethodno prikazanog Paretovog dijagrama se može uočiti ukoliko manji broj obilježja rezultira većim dijelom ukupne distribucije. U ovom primjeru to bi značilo da je većina radnika zaposlena u proizvodnoj hali i skladištu.

1.1.2. Uređivanje numeričkih podataka

Ukoliko se vršilo prikupljanje numeričkih podataka zadanih na konačnoj populaciji, ti se rezultati zadaju u obliku grupiranih ili negrupiranih podataka. Grupiranje takvih podataka se može vršiti na nekoliko načina, koji su prikazani na donjoj slici [Slika 5].

Slika 5. Načini prikazivanja kvantitativnih podataka [5]

U donjoj su tablici prikazani podaci o broju izvučenih loptica određene boje u 30 izvlačenja [Tablica 2].

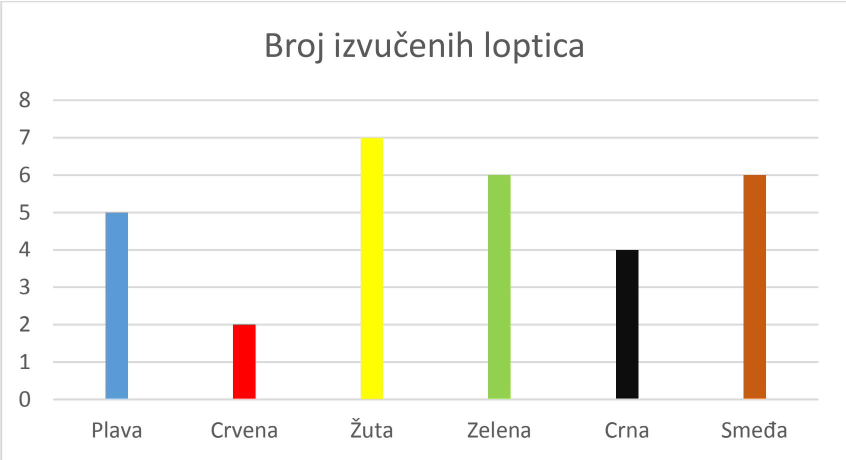
Tablica 2. Broj pojedinih izvučenih loptica

Boja loptice	Broj izvučenih puta
Plava	5
Crvena	2
Žuta	7
Zelena	6
Crna	4
Smeđa	6

Gornje prikazani podaci se mogu grupirano pokazati na dva načina:

- histogramom – frekvencije odgovaraju visinama ili površinama pravokutnika
- histogramom relativnih frekvencija.

Na donjoj slici je prikazan histogram frekvencija izvučenih loptica [Slika 6].

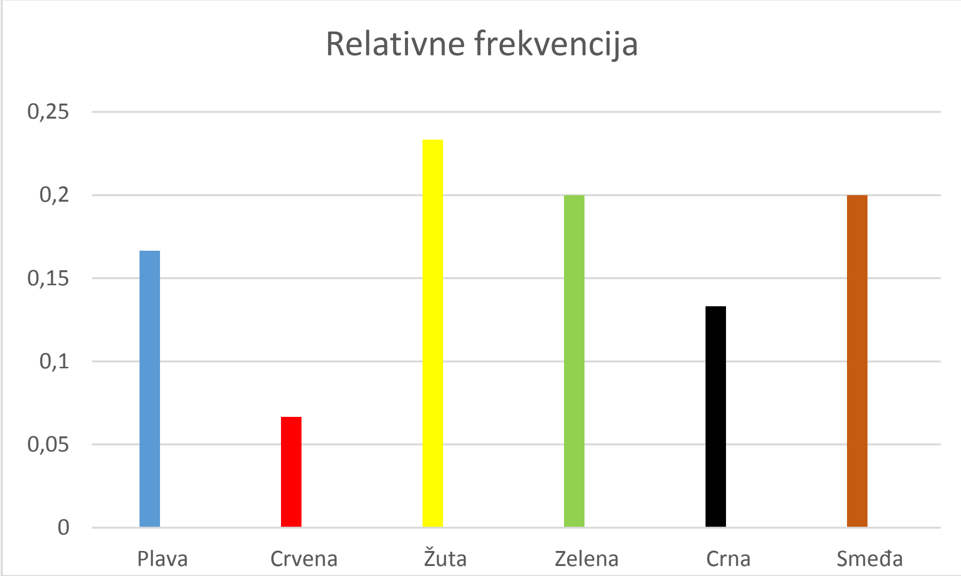


Slika 6. Broj izvučenih loptica

Na prikazanom histogramu frekvencija se može očitati koliko je puta izvučena koja loptica u 30 izvlačenja. Prednosti takvog načina prikazivanja su vrlo lagano očitavanja učestalosti ponavljanja određenih događaja, ali isto tako i mogućnost očitavanja statističkih zakonitosti, osobito prilikom mjerenja numeričkih podataka. Na osnovi izračunatih relativnih frekvencija [Tablica 3] te histograma frekvencija proizlazi histogram relativnih frekvencija [Slika 7].

Tablica 3. Tablica relativnih frekvencija

Boja loptice	Broj izvučenih puta	Relativna frekvencija
Plava	5	0,1667
Crvena	2	0,0667
Žuta	7	0,2333
Zelena	6	0,2
Crna	4	0,1333
Smeđa	6	0,2



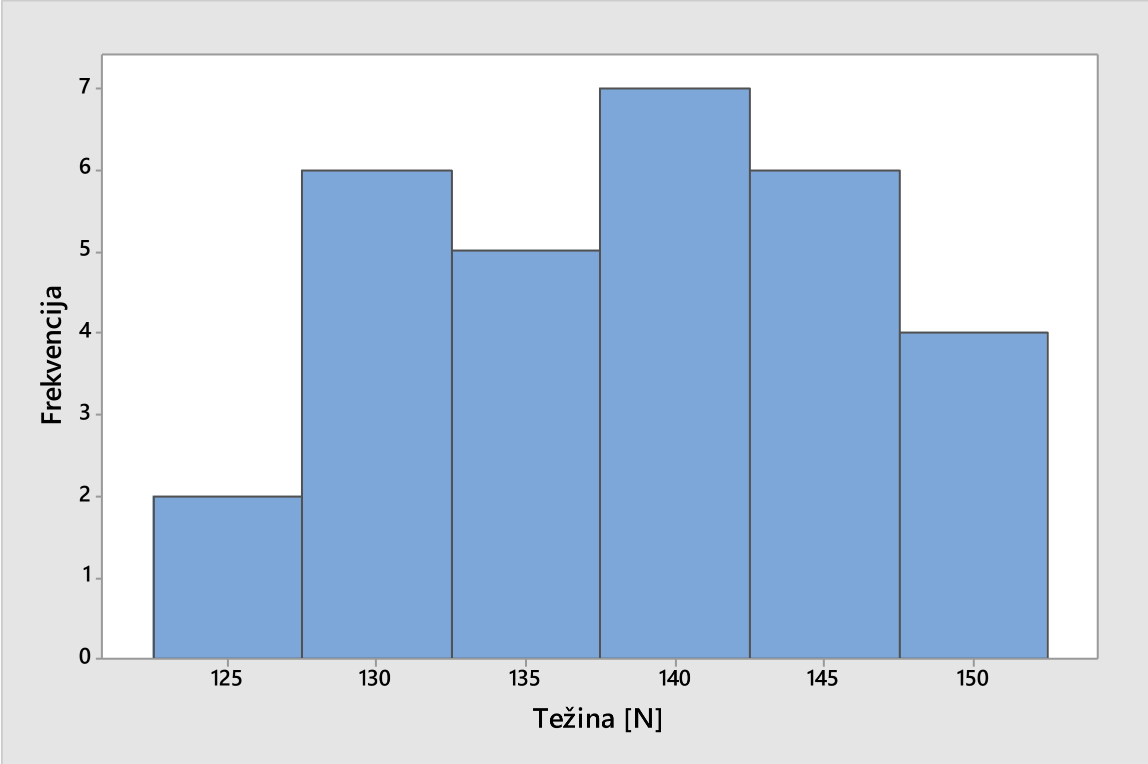
Slika 7. Histogram relativnih frekvencija

Gornje prikazani histogram relativnih frekvencija se još naziva distribucijom frekvencija. Kontinuirane varijable se također prikazuju koristeći histogram frekvencija. U donjoj je tablici dan primjer kontinuirane varijable, to jest podaci o težini pojedinih dijelova [Tablica 4].

Tablica 4. Težine dijelova

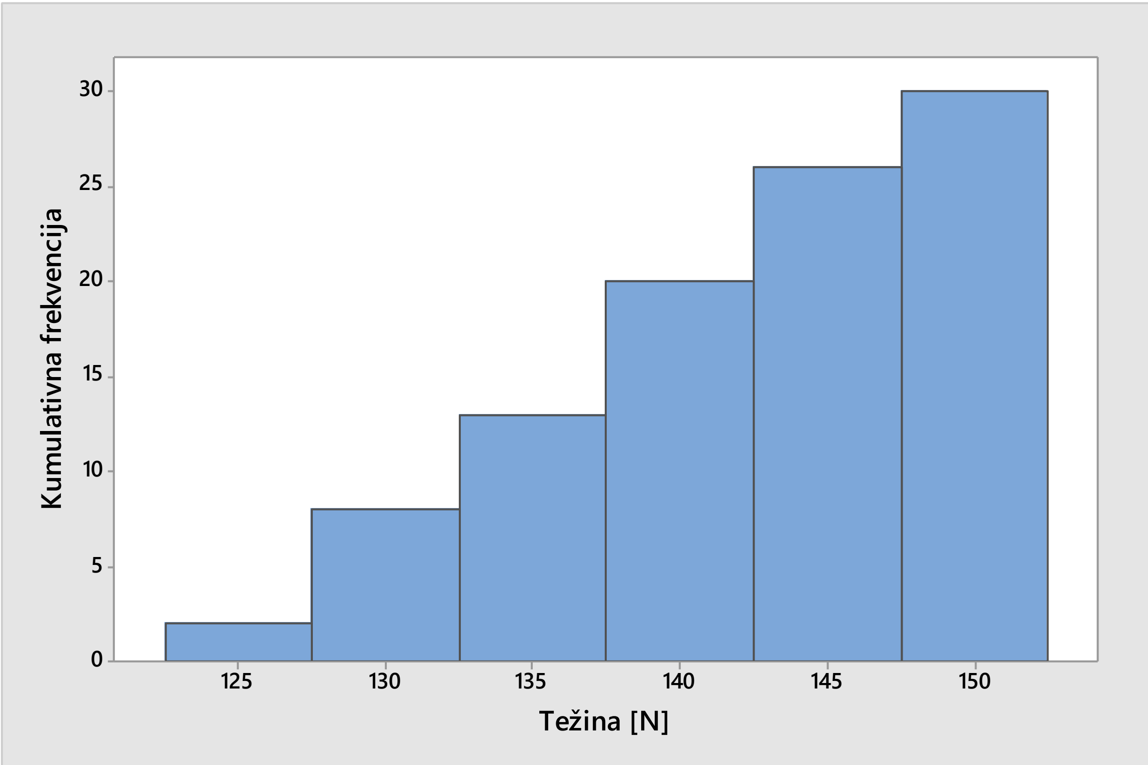
Težina odljevka (N)	Broj izmjera
125	2
130	6
135	5
140	7
145	61
150	4

Takva se varijabla također prikazuje histogramom frekvencija [Slika 8].



Slika 8. Histogram frekvencija težine dijelova

Drugi način prikaza je histogram kumulativnih frekvencija [Slika 9].



Slika 9. Histogram kumulativnih frekvencija

1.1.3. Parametri deskriptivne statistike

Populacijski parametri primjenjivani u deskriptivnoj statistici se dijele na [5]:

- srednje vrijednosti
- mjere disperzije.

Srednje vrijednosti se dijele na [5]:

1. potpune srednje vrijednosti
2. položajne srednje vrijednosti.

Potpune srednje vrijednosti obuhvaćaju sljedeće parametre [5]:

- aritmetička sredina
- harmonijska sredina
- geometrijska sredina
- moment.

Aritmetička sredina je suma svih elemenata u populaciji podijeljena s brojem elemenata populacije.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \tag{1.1}$$

Najvažnije svojstvo aritmetičke sredine je prikazano u donjoj jednadžbi.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0 \tag{1.2}$$

Harmonijska sredina je recipročna vrijednost aritmetičke sredine recipročnih vrijednosti numeričkog obilježja u jednom nizu.

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \tag{1.3}$$

Geometrijska sredina je n-ti korijen vrijednosti svih članova skupa. Upotrebljava se kao mjera prosječne brzine nekih promjena [5].

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 * x_2 * \dots * x_n} \tag{1.4}$$

Moment je aritmetička sredina niza odstupanja vrijednosti neke numeričke varijable x od njezine aritmetičke sredine $\bar{x}$ (centralni moment) ili neke druge vrijednosti (pomoćni moment) podignuta na neku potenciju r iz skupa prirodnih brojeva ℕ [5]. Ukoliko je numerička varijabla x zadana na konačnom skupu, opsega n, s vrijednostima y_1,...,y_N i distribucijom $\{(x_1, f_1), \dots (x_k, f_k\}$ i aritmetičkom sredinom $\bar{x}$ r-ti centralni moment je definiran na sljedeći način:

$$\bar{x}_r = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^r}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{x})^r}{n} \tag{1.5}$$

Položajne srednje vrijednosti obuhvaćaju sljedeće parametre [5]:

- mod
- medijan
- kvantil.

Mod je ono obilježje statističke varijable koje ima najveću frekvenciju, to jest obilježje koje se najčešće javlja. Određuje se za kvalitativna, a isto tako i za kvantitativna obilježja. Mod dijeli distribuciju frekvencija na padajuću i rastuću stranu [6]. Jednadžba kojom se izračunava mod je sljedeća:

$$M_o = L_1 + \frac{(b-a)}{(b-a)+(b-c)} l \tag{1.6}$$

gdje je:

- L_1 - donja granica modalnog razreda
- l - veličina modalnog razreda
- a - frekvencija razreda koji prethodi modalnom razredu
- b - najveća korigirana frekvencija, frekvencija modalnog razreda
- c - frekvencija razreda koji slijedi iza modalnog razreda.

Medijan je vrijednost statističkog obilježja koja dijeli statistički niz na dva ista dijela, što znači da je 50% podataka veće, a 50% podataka manje vrijednosti od njega. Jednadžba kojom se izračunava medijan je sljedeća:

$$M_e = L_1 + \frac{\frac{n}{2} + \sum_{i=1}^{m} f_i}{f_{med}} * l \qquad (1.7)$$

gdje je:

- L_1- donja granica modalnog razreda
- l - veličina modalnog razreda
- $\frac{n}{2}$ - polovina elemenata statističkog niza
- $\sum_{i=1}^{m} f_i$ - zbroj svih apsolutnih frekvencija do medijalnog razreda, isključujući medijalni razred, to jest kumulativna frekvencija ispred kumulativne frekvencije medijalnog razreda
- f_{med} - apsolutna frekvencija medijalnog razreda.

Kvantili su vrijednosti numeričkog obilježja koje niz uređen po veličini dijele na q jednakih dijelova [6]. Kvantili reda n određuju n intervala u svakom od koji se nalazi najviše $\frac{100}{n}$% vrijednosti niza [5].

Kvantili se s obzirom na broj redova dijela na:

- medijane - kvantili reda 2
- kvartile - kvantili reda 4
- decile - kvantili reda 10
- percentile - kvantili reda 100.

Mjere disperzije se dijele na [5]:

1. potpune mjere disperzije
2. nepotpune mjere disperzije.

Potpune mjere disperzije obuhvaćaju sljedeće parametre [5]:

- varijanca
- standardna devijacija
- koeficijent varijacije.

Varijanca je prosječno kvadratno odstupanje svakog podatka od aritmetičke sredine [6]. Koristi se u cilju utvrđivanja stvarne varijabilnosti i disperzije podataka oko srednje vrijednosti.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} \qquad (1.8)$$

Standardna devijacija je prosječno odstupanje svakog podatka od aritmetičke sredine [6]. To je najvažnija i istovremeno najčešće upotrebljavana mjera za procjenu varijabilnosti. Što je njezina vrijednost manja to je varijabilnost cijelog statističkog skupa manja. Pomoću nje se određuje da li je distribucija statističkog skupa normalna.

$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} \tag{1.9}$$

Koeficijent varijacije predstavlja postotak standardne devijacije od aritmetičke sredine. Služi za međusobno uspoređivanje varijabilnost pojava ili svojstava te se mjeri u postocima (%).

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} * [100\%] \tag{1.10}$$

Standardizirano obilježje služi za ocjenu veličine individualnog odstupanja numeričkog obilježja x_i od aritmetičke sredine $\bar{x}$. Mjeri koliko standardnih devijacija obilježje x_i odstupa od $\bar{x}$.

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}, i = 1,2,3, \dots, n \tag{1.11}$$

Nepotpune mjere disperzije obuhvaćaju sljedeće parametre [5]:

- raspon varijacije
- interkvartil
- koeficijent kvartilne devijacije.

Raspon varijacije predstavlja razliku između najveće i najmanje vrijednosti u nekom zadanom nizu, ukoliko takve postoje.

$$R_x = x_{max} - x_{min} \tag{1.12}$$

Interkvartil je razlika gornjeg i donjeg kvartila numeričke ili ordinale varijable [5]. To je raspon varijacije središnjih 50% članova uređenog niza.

$$I_Q = Q_3 - Q_1 \tag{1.13}$$

Koeficijent interkvartilne devijacije je pripadajuća relativna mjera, koja ima smisla samo u slučaju kada je varijabla pozitivna vrijednost.

$$V_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_1 + Q_3} \tag{1.14}$$

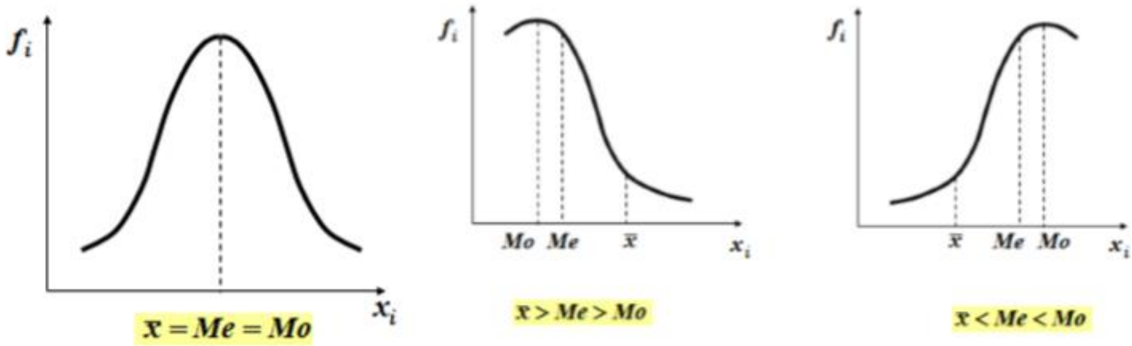
Mjere asimetrije daju informacije o načinu rasporeda podataka prema aritmetičkoj sredini. Najvažniji parametar koji se koristi u tu svrhu je koeficijent asimetrije, to jest mjera nagnutosti distribucije na lijevu ili desnu stranu. Računa se prema sljedećem izrazu:

$$\alpha_3 = \frac{M_3}{\sigma_3} = \frac{\frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{\sigma^3} \tag{1.15}$$

Ovisno o njegovoj vrijednosti mogu se donijeti sljedeći zaključci o asimetriji:

- $\alpha_3 = 0$ - 0,25 - zanemariva asimetrija
- $\alpha_3 = 0{,}25$ - 0,50 - slaba asimetrija
- $\alpha_3 = 0{,}50$ - 0,75 - srednja asimetrija
- $\alpha_3 = 0{,}75$ - +∞ - jaka asimetrija.

Grafički prikaz simetrične ($\alpha_3 = 0$), pozitivno simetrične ($\alpha_3 > 0$) i negativno simetrične varijable ($\alpha_3 < 0$) dan je na sljedećoj slici [Slika 10].



Slika 10. Različiti slučajevi vrijednosti koeficijenta simetrije [5]

Mjere zaobljenosti daju informacije o zaobljenosti modalnog vrha na poligonu distribucije frekvencija varijable. Ta zaobljenost ili spljoštenost se mjeri koeficijentom zaobljenosti ili spljoštenosti:

$$\alpha_4 = \frac{M_4}{\sigma_4} = \frac{\frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{\sigma^4} \tag{1.16}$$

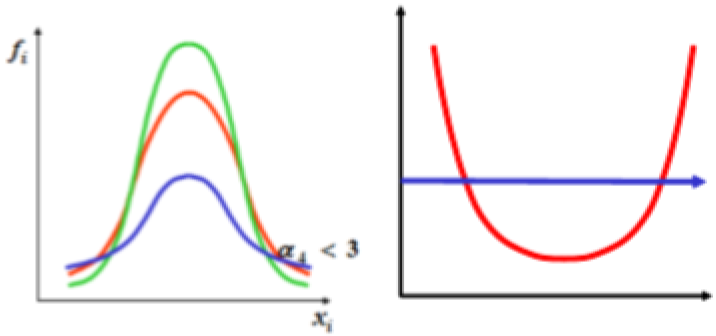
Normira se na nulu u cilju jednostavnijeg očitavanja:

$$\alpha_4' = \frac{M_4}{\sigma_4} - 3 \tag{1.17}$$

Na temelju vrijednosti tog parametra donose se zaključci o spljoštenosti:

- α_4 =3 - „normalno“ zaobljena raspodjela
- α_4 >3 - više zaobljena raspodjela
- α_4 <3 - manje zaobljena raspodjela
- α_4 =1,8 - nezaobljena raspodjela
- α_4 <1,8 - U - zaobljena raspodjela.

Grafički prikaz gore navedenih vrijednosti u istom redoslijedu dan je na donjoj slici [Slika 11].



Slika 11. Različiti slučajevi vrijednosti koeficijenta spljoštenosti [5]

1.1.4. Primjena deskriptivne statistike u statističkoj analizi

Deskriptivna statistika daje jednostavan i sažet uvid u prikupljeni uzorak i u zapažanja koja su nastala tijekom prikupljanja podataka. Ovisno o potrebi istraživača takvi sažeci mogu biti kvantitativni, odnosno statistički obrađeni, ili vizualni, odnosno lako razumljivi grafički prikazi. Kako je već prije navedeno, analiza takvih manjih uzoraka može biti temelj za projektiranje i ostvarenje nekog većeg projekta, za neko opsežnije statističko istraživanje, ali isto tako može biti i samostalni eksperiment.

Uporabom deskriptivne statistike se dolazi do informacija kao što su efikasnost pojedinog radnika, uspješnost studenta tijekom studiranja i slično. Jedna od glavnih aplikacija deskriptivne statistike, i općenito statistike, je u poslovnom svijetu. Dobar primjer za to je analiza investicija u gospodarskom sektoru. Provodeći takvu analizu bankari i investitori dobivaju informacije o uspješnosti pojedinih ulaganja te uvid u mogućnosti budućeg ulaganja te isplativost istih.

1.2. Inferencijalna statistika

Kako u većini slučajeva istraživač nema uvid u cijelu populaciju za koju se određeni eksperiment vrši, potrebno je na temelju informacija i zaključaka koji su dobiveni iz analize nekog uzorka donijeti zaključak koji će se odnositi na cjelokupnu populaciju. Pomoću inferencijalne statistike i koristeći uzorke može se generalizirati cjelina iz koje je uzorak izvučen. Upravo iz toga razloga je uzimanje uzoraka koji će dovoljno dobro reprezentirati populaciju od iznimne važnosti.
Teoremi inferencijalne statistike proizlaze iz činjenice da svakim uzorkovanjem prirodno nastaje greška, i samim time se pretpostavlja da nijedan uzorak savršeno ne predstavlja populaciju. Tako su razvijene dvije metode inferencijalne statistike koje su i danas u uporabi:

1. procjena parametara
2. testiranje statističkih hipoteza.

Većina metoda inferencijalne statistike proizlazi iz općeg linearnog modela. To uključuje t-test, analizu varijance (ANOVA), analizu kovarijance (ANCOVA), regresijsku analizu, i mnoge viševarijantne metode kao što su faktorske analize, multidimenzionalno skaliranje, klaster analiza i diskriminacijska funkcijska analiza.

2. Statistička analiza procesa

Statistička analiza procesa (eng. *Statistical Process Control* - SPC) je industrijska metoda mjerenja i kontrole kvalitete procesa proizvodnje koristeći razne statističke metode [13]. Podaci o kvaliteti u obliku informacija o proizvodu ili procesu se prikupljaju u realnom vremenu, u vremenu u kojem proizvodnja teče. Ti se podaci zatim prikazuju na grafikonima s unaprijed utvrđenim kontrolnim granicama. One određuju sposobnost procesa, dok specificirane kontrolne granice određuju želje kupaca. Ima svrhu osigurati da potencijal nekog proizvodnog sustava bude maksimalno iskorišten, pri čemu se implicira na cilj da se proizvede najveći mogući broj ispravnih proizvoda sa što manje ili nimalo otpada i gubitaka. Tu je metodu moguće koristiti u svim procesima s mjerljivom produktivnošću.
Sam postupak statističke analize procesa nema srž u statistici ili kontroli, već u kompetentnosti [13]. Svaka organizacija, neovisno o tome čime se bavi, nastoji biti izvanredna i bolja od konkurencije u tri glavna područja:

- kvaliteta
- isporuka
- cijena.

2.1. Faze statističke analize procesa

Statistička analiza procesa mora biti provedena u dvije faze:

1. početno uspostavljanje procesa
2. redovita upotreba procesa u proizvodnji.

Odluka o trajanju intervala tijekom kojeg će se druga faza provoditi ovisi o tome na koji će način najvažniji faktori u proizvodnji reagirati: čovjek, stroj, materijal, metoda (eng. *Man, Machine, Material, Method* - 4 M). Isto tako se ne smije zanemariti utjecaj stope rasta istrošenosti dijelova, alata i pribora korištenog u proizvodnji.

2.2. Prednosti i ograničenja statističke analize procesa

Jedna od glavnih prednosti primjene statističke analize procesa je mogućnost ranog otkrivanja problema i nedostataka u proizvodnji. Time se otklanja potreba za popravkom ili zamjenom dijelova proizvodnog sustava nakon što se neki kvar dogodi.
Ostale prednosti primjene SPC metode su:

- drastično smanjenje količine otpada i varijabilnosti proizvoda

- mogućnost znanstvenog poboljšanja produktivnosti
- smanjenje troškova
- trenutna reakcija na promjene u procesu
- donošenje odluka tijekom stvarnog vremena odvijanja proizvodnog procesa.

Kao i sve metode, SPC ima nedostatke i ograničenja. Kako se otpad i gubici minimiziraju, uklonjena je potreba za kontrolom proizvoda nakon samog procesa proizvodnje. Nedostatak je u tome što sama primjena SPC metode ovisi o vještinama onih koji je primjenjuju, te o prikladnosti nekoga procesa da bude vođen tome metodom. Zato vrlo veliku važnost treba pridonijeti utvrđivanju pogodnosti primjene te metode za određene procese.

2.3. Primjena statističke analize procesa

Primjena SPC je u tri glavne aktivnosti [16]:

1. razumijevanje procesa i specificiranih kontrolnih granica
2. uklanjanje izvora varijacija, što rezultira povećanom stabilnošću procesa
3. praćenje tijeka procesa proizvodnje, u svrhu utvrđivanja značajnijih promjena.

U svrhu lakšeg provođenja same metode koriste se dodatni pomoćni materijali, od kojih su najvažnije kontrolne karte. Pomoću njih se bilježe i nadziru podaci mjerenja varijacija te se na taj način na vrijeme uoči ukoliko proces ode izvan kontrole. Uzorci iz procesa se uzimaju u određenim vremenskim intervalima, te se nakon dijagnosticiranja neuobičajenih varijacija drugim alatima utvrđuje uzrok tih varijacija.

3. Varijacije u proizvodnji

U većini slučajeva mjerenja istih dimenzija provedena na različitim dijelovima u proizvodnji i stvarne vrijednosti dimenzija ne budu ista, to jest jedan se dio razlikuje od drugoga. Uzrok te varijacije je u određenim faktorima prisutnih u procesu proizvodnje tih dijelova.

3.1. Analiza uzroka varijacija

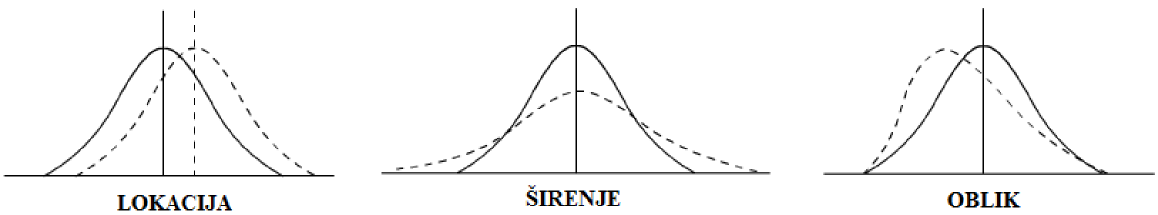
Identificiranje prije navedenih faktora u procesu se ponekad čini neostvarivo. Naime, gotovo je nemoguće otkriti točan uzrok varijacija, ali se ti uzroci mogu podijeliti u dvije skupine:

1. česti, obični, slučajni uzroci
2. posebni, ne - slučajni uzroci.

Cilj proizvodnje je produkcija identičnih dijelova. Kako to nije izvedivo u realnim uvjetima, nastoje se minimizirati varijacije između proizvoda, to jest postići stabilnost procesa, što bi značilo eliminaciju posebnih uzroka.
Distribucija izlaznih veličina nekog procesa definiran je konstantnošću triju faktora [17]:

1. lokacija
2. širenje
3. oblik.

U stabilnom procesu te tri veličine se ne mijenjaju. Primjer varijacija dan je na donjoj slici [Slika 12].



Slika 12. Varijacije u proizvodnom sustavu [17]

Ukoliko su u procesu prisutni samo česti uzroci varijacija, distribucija gore navedenih izlaznih parametara tijekom vremena ostaje nepromijenjena, pa se za takav takav proces smatra da je „pod kontrolom“.

4. Sposobnost procesa

Sposobnost procesa se određuje računanjem indeksa sposobnosti procesa te pomoću drugih, manje važnih faktora za industrijsku proizvodnju. On uspoređuje izlaze, produkte nekog procesa koji je pod kontrolom sa specificiranim kontrolnim granicama. Neki se proces smatra sposobnim ukoliko je raspon zahtjeva veći ili jednak rasponu procesa. Raspon zahtjeva, to jest tolerancijsko polje T je područje između gornje i donje granice zahtjeva.

$$T = USL - LSL \tag{4.1}$$

Raspon procesa podrazumijeva područje unutar ± 3 standardna odstupanja, to jest 6σ u odnosu na sredinu procesa. Temeljni uvjet sposobnosti procesa je prikazan donjom jednadžbom.

$$T \geq 6\sigma \tag{4.2}$$

Na temelju sposobnosti procesa se dolazi do zaključka o potrebi za poboljšanjem procesa. Njime se mjeri učinkovitost procesa u slučaju eliminiranih posebnih uzroka varijacija. Važnost bivanja nekog procesa „pod kontrolom“ je u tome što je moguće djelovati na proces u trenutku pojave naznaka da bi mogao izaći iz kontrole.

Prije nego što je moguće ocijeniti sposobnost nekog procesa, on se mora dovesti u stanje statističke kontrole, što znači da mora biti normalno distribuiran. U tu svrhu se koriste 3 statistička elementa [18]:

1. kontrolne karte
2. histogram
3. matematička analiza distribucije.

Sljedeći korak je odabir parametra čija će se vrijednost ocjenjivati, to jest odabir kritičnog parametra. On se određuje nizom postupaka, ovisno o složenosti samog proizvodnog procesa.

4.1. Pokazatelji sposobnosti procesa

Za izračun sposobnosti procesa se primjenjuju sljedeće pretpostavke [18]:

- razdioba podataka se aproksimira normalnom razdiobom
- proces koji se analizira je stabilan i bez značajnih uzroka varijacija, to jest proces je „pod kontrolom“

- pouzdana procjena sposobnosti procesa može se donijeti samo temeljem praćena procesa primjenom odgovarajuće kontrolne karte i nakon dovođenja procesa u stanje statističke kontrole, stanje „pod kontrolom“.

Indeksi sposobnosti procesa su u krajnosti pojedinačni brojevi. Prednost je u tome što je najlakše uspoređivati procese preko jednog broja, ali taj broj daje ograničenu količinu informacija, to jest nemoguće je sve podatke i karakteristike u procesu prikazati jednim brojem, što predstavlja nedostatak.

Ovisno o vremenu odvijanja procesa, sposobnost procesa se dijeli na:

1. Sposobnost procesa u dužem vremenskom razdoblju (eng. *Long Term Process Capability*)
2. Preliminarna sposobnost procesa (eng. *Preliminary Process Capability*)
3. Sposobnost procesa u kratkom vremenskom razdoblju (eng. *Short Term Process Capability*).

4.2. Sposobnosti procesa u dužem vremenskom razdoblju

Ukoliko se neki proces odvija neko duže vrijeme, njegove sposobnosti se računaju nakon proteklog dužeg razdoblja u kojem su se mogle pojaviti sve moguće varijacije procesa. Preporučeno trajanje jednog takvog razdoblja je 20 dana [18]. Većina indeksa je valjana tek nakon nekog određenog broja očitanih mjerenja, najčešće 50 [19]. Indeksi sposobnosti procesa koji se mogu izračunati u tom slučaju su sljedeći:

1. potencijalna sposobnost C_p
2. omjer sposobnosti C_r
3. donja potencijalna sposobnost C_{pL} i gornja potencijalna sposobnost C_{pU}
4. faktor korekcije necentriranosti k
5. demonstrirana izvrsnost C_{pk}.

Potencijalna sposobnost C_p se računa kao odnos tolerancije prema 6σ prema izrazu:

$$C_p = \frac{T}{6\hat{\sigma}} = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} \tag{4.3}$$

gdje je:

- T - tolerancijsko polje
- $\hat{\sigma}$ - standardno odstupanje.

Standardno odstupanje $\hat{\sigma}$ se procjenjuje analizom odgovarajuće kontrolne karte.

Ukoliko se primjenjuje $\bar{x} - R$ kontrolna karta:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \tag{4.4}$$

Ukoliko se primjenjuje $\bar{x} - s$ kontrolna karta:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{C_2} \tag{4.5}$$

C_p pokazuje koliko je puta širina tolerantnog polja veća od stvarne širine odgovarajuće raspodjele. Što je njegov iznos veći, to je rasipanje procesa manje. Tipična vrijednost mu je od nule do vrlo velikih vrijednosti. Proces se smatra teorijski sposobnim ukoliko je $C_p \geq 1$. U praksi svako poduzeće ima subjektivno određeni iznos C_p te se prema njemu orijentiraju. Tako većina japanskih tvrtki određuje sposobnost svog procesa prema C_p=1,33, što odgovara slučaju kada interval $\pm 3\sigma$ zauzima 75% od polja dopuštenog odstupanja.
C_r predstavlja recipročnu vrijednost C_p.

$$C_r = \frac{6\hat{\sigma}}{T} = \frac{6\hat{\sigma}}{USL - LSL} \tag{4.6}$$

Iznos C_r prikazan u postocima pokazuje postotak tolerancijskog područja koji je iskorišten rasponom procesa.
Donja potencijalna sposobnost C_{pL} se računa prema sljedećem izrazu:

$$C_{pL} = \frac{(\bar{x} - L)}{3 * \hat{\sigma}} \tag{4.7}$$

Gornja potencijalna sposobnost C_{pU} se računa prema sljedećem izrazu:

$$C_{pU} = \frac{(U - \bar{x})}{3 * \hat{\sigma}} \tag{4.8}$$

Kako C_p i C_r ne pokazuju kako je proces smješten u odnosu na granice specifikacija, u tu se svrhu koriste C_{pL} i C_{pU}.
Tri su moguća slučaja:

1. iznosi su identični, to jest jednaki iznosu C_p - proces je potpuno centriran
2. iznos je manji od jedan - proces je nesukladan
3. proces je pomaknut prema granici specifikacije manje vrijednosti indeksa.

Ukoliko dođe do potrebe za korigiranjem iznosa indeksa C_p računa se faktor necentriranosti k:

$$k = \frac{|M - \bar{x}|}{\frac{USL - LSL}{2}} \tag{4.9}$$

gdje je :

- M - ciljana vrijednost procesa .

Tipična vrijednost k je 0$< k < 1$.

Demonstrirana izvrsnost C_{pk} se koristi u slučajevima kada se prosjek ne nalazi u centru tolerantnog područja, to jest kada je primjenjiv indeks C_p. C_{pk} iskazuje točnost nekog procesa na osnovi najlošije slike podataka. Četiri su slučaja vrijednosti C_{pk}:

1. C_{pk} = 0 - srednja vrijednost je jednaka jednoj od granica tolerancije
2. $0 < C_{pk} < 1$ - proces izlazi izvan granica tolerancije
3. C_{pk} = 1 - jedan kraj procesa pada na granicu tolerancije
4. $C_{pk} > 1$ - proces ulazi potpuno unutar granica tolerancije.

Što je iznos C_{pk} veći to će manja količina proizvoda biti izvan dopuštenih granica. Dolje prikazana jednadžba prikazuje odnos između indeksa C_p i C_{pk}.

$$C_{pk} = C_p(1 - k) \tag{4.10}$$

U slučaju idealno centriranog procesa k iznosi 0 te je $C_{pk} = C_p$.

4.3. Preliminarna sposobnost procesa

Preliminarno procjenjivanje sposobnosti nekog procesa se provodi na njegovom početku ili nakon nekog kraćeg vremenskog perioda praćenja procesa. Preporučena veličina uzorka je najmanje 100 jedinica, ili kontrolna karta s najmanje 20 uzoraka [18].

Jednadžbe za izračun indeksa tijekom određivanja preliminarne sposobnosti procesa su jednake kao i za indekse sposobnosti procesa u dužem vremenskom razdoblju. Razlika je jedino u oznakama indeksa, pošto se umjesto riječi sposobnost (eng. *Capability*) koristi riječ značajka (eng. *Performance*), te se stoga indeksi označavaju kao P_p, P_{pL}, P_{pU}, P_{pk}. Standardno odstupanje se naziva ukupno standardno odstupanje (eng. *Overall Standard Deviation*), a računa se prema sljedećem izrazu:

$$s = \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \tag{4.11}$$

4.4. Sposobnost procesa u kratkom vremenskom razdoblju

Analiza sposobnosti stroja (eng. *Machine Capability Analysis*) je termin koji se često koristi u analizi sposobnosti procesa u kratkom vremenskom razdoblju [18]. Primjenjuje se prilikom preuzimanja stroja te analiza na uzorku od najmanje 50 jedinica. Najviše se pažnje pridodaje informaciji o rasipanju podataka oko ciljane vrijednosti M.

$$M = \frac{USL + LSL}{2} \tag{4.12}$$

4.4.1. *Potencijalna sposobnost stroja C_{pm}*

Potencijalna sposobnost stroja C_{pm} se računa uporabom alternativne procjene standardnog odstupanja koja sadrži učinak slučajne necentriranosti, to jest rasipanja oko ciljane vrijednosti:

$$C_{pm} = \frac{T}{6\hat{\sigma}} = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}} \tag{4.13}$$

gdje je:

- $\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - M)^2}{n-1}}$.

Korištenjem ove jednadžbe se više pažnje pridaje cilju M, a manje granicama specifikacije.

4.5. Primjena indeksa sposobnosti procesa

Indeksi sposobnosti procesa se u sve više poduzeća primjenjuju iz nekoliko razloga:

- suvremeno upravljanje kvalitetom naglasak stavlja problem varijabilnosti konkretnih vrijednosti, to jest odstupanje parametara proizvoda od zadanih vrijednosti. To predstavlja glavni uvjet konkurentnosti u današnjem globaliziranom svijetu
- indeksi sposobnosti procesa su primjereni za periodičku provjeru usklađenosti procesa s definiranim zahtjevima, kako od kupaca tako i od samih proizvođača
- provjera i podešavanje sredstava u eksploataciji, njihova kontrola i održavanje zahtijeva jednostavne kvantitativne pokazatelje stabilnosti procesa, kroz duži ili kraći vremenski period, ovisno o potrebama pojedinih organizacija
- suvremeni zahtjevi za certificiranim proizvodima nalažu postojanje kvantitativnih karakteristika deklarirane kvalitete
- prikladni su za izbor, praćenje i kontrolu dobavljača, te za postavljanje budućih zahtjeva prema dobavljačima, čime se stimulira njihov razvoj i napredak

- odlično su sredstvo za kontrolu stanja i poboljšanje tehnoloških procesa
- imaju važnu ulogu u interakciji s kupcima i korisnicima, što za rezultat ima otežano prodavanje proizvoda za koje nije poznat indeks sposobnosti procesa njihove proizvodnje
- omogućavaju svakom pojedinom sudioniku u procesu proizvodnje, dobavljačima, kupcima, radnicima i menadžerima da na probleme kvalitete gledaju iz iste perspektive, što danas predstavlja nužan uvjet za napredak, razvoj i kompetentnost u svijetu.

Premda imaju mnoge prednosti te je suvremena proizvodnja nezamisliva bez njihove uporabe, indeksi sposobnosti procesa imaju i svoje nedostatke. Jedan od najvažnijih je jednostavno usklađivanje sa zahtjevima prema određenoj vrijednosti indeksa, na način da se izmjene vrijednosti USL i LSL. To ne bi predstavljalo problem da se te vrijednosti izmjene i u stvarnoj proizvodnji, a ne samo u tehničkoj dokumentaciji, kao što je to čest slučaj. Isto tako velik problem predstavlja proizvoljno određivanje tolerancije i korigiranje iste. Ona se određuje na temelju σ te se mijenja samo ukoliko se u procesima mijenjaju parametri kao što su broj ljudi i broj strojeva. Promjenom parametara se smanjuje vrijednost σ, što rezultira smanjenjem tolerancije. Vrlo je važno potpuno i stručno razumijevanje dopuštenih odstupanja, kako ne bi bilo predviđanja kritičnih nedostataka u proizvodnji, unatoč zadovoljavajućim vrijednostima indeksa sposobnosti procesa, jer su glavni temelj izračuna tih vrijednosti sama odstupanja.

5. Kontrola kvalitete i 6σ metodologija

Međunarodna norma (ISO 9000) definira kvalitetu kao ukupnost svojstava nekog entiteta koja ga čine sposobnim da zadovolji izražene ili pretpostavljene potrebe [23]. Sam pojam entiteta može imati različita tumačenja:

- proces ili radnja
- proizvod
- organizacija ili sustav
- osoba
- kombinacije prije navedenih tumačenja.

Kako postoji mnogo različitih načina upotrebe a time i shvaćanja pojma kvalitete važno je stručno i znanstveno definirati sam pojam. Isto tako je neizbježno pravilno odrediti uzroke i izvore zahtijevanog stupnja kvalitete. Kvalitete je određena:

- ne od inženjera
- ne od prodaje
- ne od uprave
- od strane korisnika.

5.1. Kvaliteta proizvoda

U samoj proizvodnji od izuzetne je važnosti kvaliteta proizvoda koji je rezultat radnje ili procesa i može biti stvaran ili nestvaran. Pod proizvodima se podrazumijeva različita oprema, programska podrška, usluge i gradiva za obradu. Dva najvažnija elementa koja se odnose na proizvode su:

1. sigurnost
2. pouzdanost.

Sigurnost se odnosi na rizik od pojave kvara i na posljedice toga kvara [23]. Ona je jedno od glavnih obilježja kvalitete.

Pouzdanost je u tehnici strogo definirana i odnosi se isključivo na proizvod [23]. Njome se iskazani sljedeći zahtjevi:

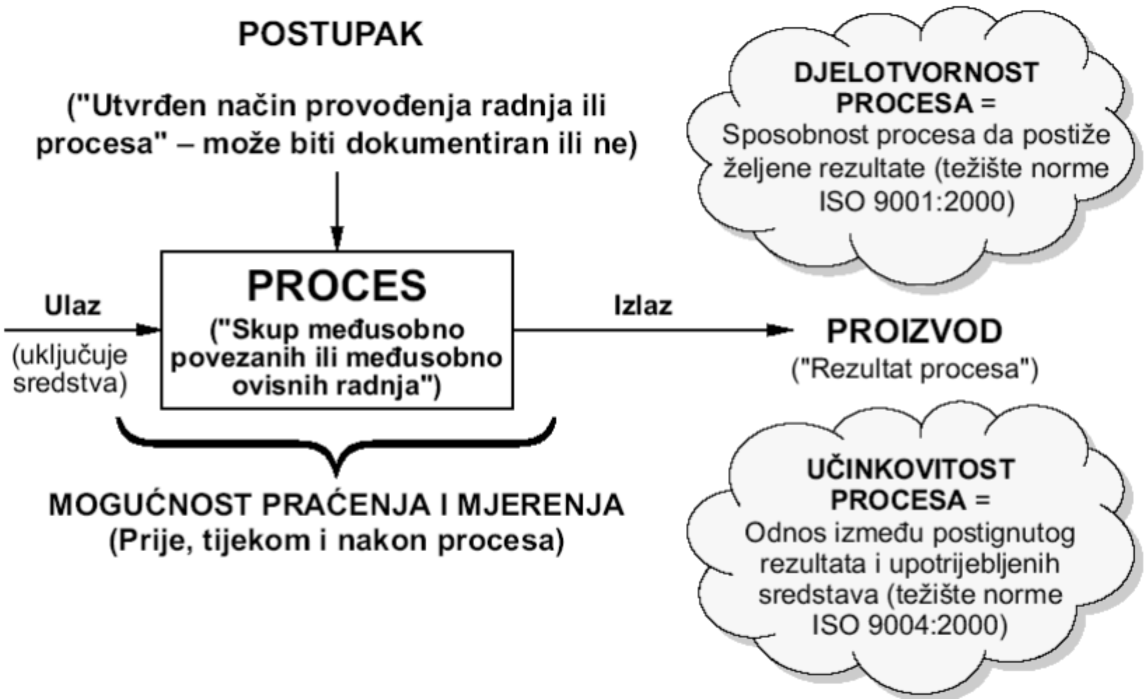
- osiguranje tražene funkcionalnosti proizvoda
- rad proizvoda bez pojave kvarova
- rad proizvoda u planiranom vijeku trajanja

- pravilan rad proizvoda u prije definiranim uvjetima uporabe.

5.2. Kvaliteta procesa

Drugi važni entitet kojem se pridodaje velika pozornost prilikom kontrole njegove kvalitete je sam proces proizvodnje nekog proizvoda. Svaki proces ima ulazne elemente, koje je moguće mjeriti, te izlazne elemente, stvarne ili nestvarne rezultate procesa, koji su također mjerljivi u svakoj fazi procesa.

Proces se definira kao skup međuzavisnih sredstava i radnji koji preoblikuju ulazne elemente u izlazne [23]. Shematski prikaz procesa dan je na donjoj slici [Slika 13].



Slika 13. Shematski prikaz procesa [23]

Na gore prikazanoj slici vidljiva je izravna povezanost ulaznih i izlaznih elemenata preko procesa.

5.3. Kontrola kvalitete

Kontrola kvalitete je postupak ili skup postupaka primjenjivanih u svrhu osiguranja proizvodnje proizvoda ili usluga koji se pridržavaju definiranog skupa kriterija kvalitete i zadovoljavaju zahtjeve klijenta ili kupca pomoću sljedećih alata [23]:

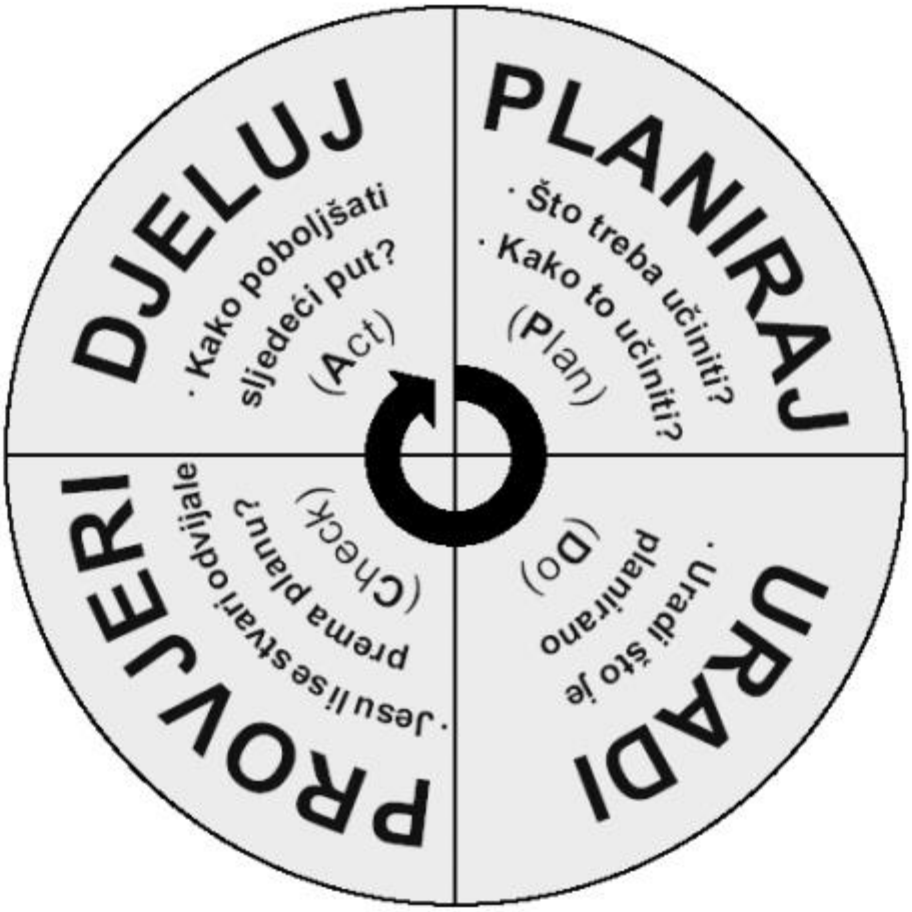
- planiranja kakvoće
- praćenja kakvoće (eng. *Quality Control* - QC)
- osiguravanja kakvoće (eng. *Quality Assurance* - QA)
- poboljšanja kakvoće (eng. *Quality Improvement* - QI).

Praćenje kakvoće QC i osiguravanje kakvoće QA su veoma slični i međusobno povezani pojmovi. Razlika je u tome što se QA definira kao postupak ili skup postupaka tome da se osigura da proizvod ili usluga u razvoju ispunjavaju propisane uvjete prije završetka radova, a ne poslije, kao što je to slučaj kod praćenja kakvoće.

Kontrola kvalitete se može opisati kao zatvoreni krug između četiriju aktivnosti koje su u međusobnoj vezi:

1. planiraj
2. uradi
3. provjeri
4. djeluj.

Prikaz povezanosti gore navedenih aktivnosti dan je na donjoj slici [Slika 14].



Slika 14. Ciklus planiraj-uradi-provjeri-djeluj [23]

Ovisno o veličini kontroliranog uzorka razlikuju se tri vrste kontrole kvalitete:

1. 100%-na kontrola
2. procentualna kontrola

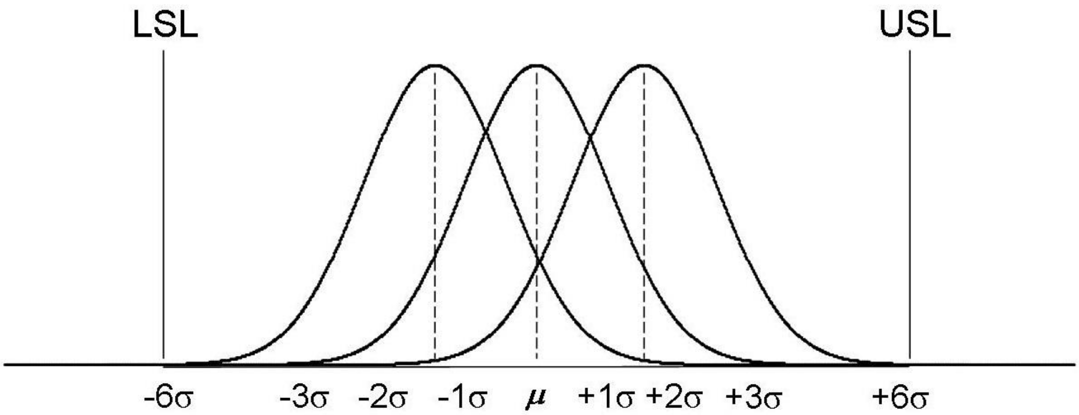
3. statistička kontrola.

5.4. 6σ metodologija

Šest sigma (eng. *Six Sigma* - 6σ) je metodologija poboljšanja poslovnog procesa korištenjem statističke analize, a ne nagađanja [21]. U većini organizacija predstavlja mjeru kvalitete koja teži savršenosti. Predstavlja discipliniran pristup za otklanjanje svih nedostataka u svakom od procesa, od proizvodnje do transakcija i od proizvoda do usluge. Ovaj je dokazani pristup implementiran u bezbroj grana industrija u svrhu uštede novca uz povećanje zadovoljstva kupaca.

σ predstavlja varijabilnost nekog procesa pod pretpostavkom da se taj proces ponaša prema normalnoj razdiobi, dok 6 predstavlja razinu kvalitete, to jest učestalost mogućih pogrešaka uz unaprijed definirane granice tolerancije, odnosno specifikacije.

Ovisno o granicama specifikacije, to jest o σ, određen je postotak sukladnih proizvoda i usluga [Slika 15].



Granice specifikacije	Sukladnih %	Nesukladnih PPM
+/- 1 sigma	30.23	697700
+/- 2 sigma	69.13	308700
+/- 3 sigma	93.32	66810
+/- 4 sigma	99.3790	6210
+/- 5 sigma	99.97670	233
+/- 6 sigma	99.9996600	3.4

Slika 15. Površina pod krivuljom u ovisnosti o σ [35]

U slučaju primjenjivanja 6σ granice, iznimno je malen postotak udjela varijacija u proizvodnji, pošto postotak sukladnih proizvoda iznosi izvanrednih 99,9996600%. Kako je cilj postići što manju varijabilnost u procesu proizvodnje, primjena 6σ metodologije je od iznimne važnosti u ostvarivanju kompetentnosti na suvremenom tržištu.

Prva od tri šest sigma metodologije je upravljanje procesom (eng. *Process Management*). Sastoji se od četiri koraka:

1. definirati proces
2. izmjeriti karakteristike
3. analizirati rezultate
4. kontrolirati proces.

Skupna kratica za ta četiri koraka je DMAC (eng. *Define, Measure, Analyze, Control* - DMAC).

Iz nje proizlazi druga šest sigma metodologija koja je definirana pomoću pet koraka:

1. definirati problem
2. izmjeriti karakteristike
3. analizirati rezultate
4. poboljšati procesa
5. kontrolirati proces.

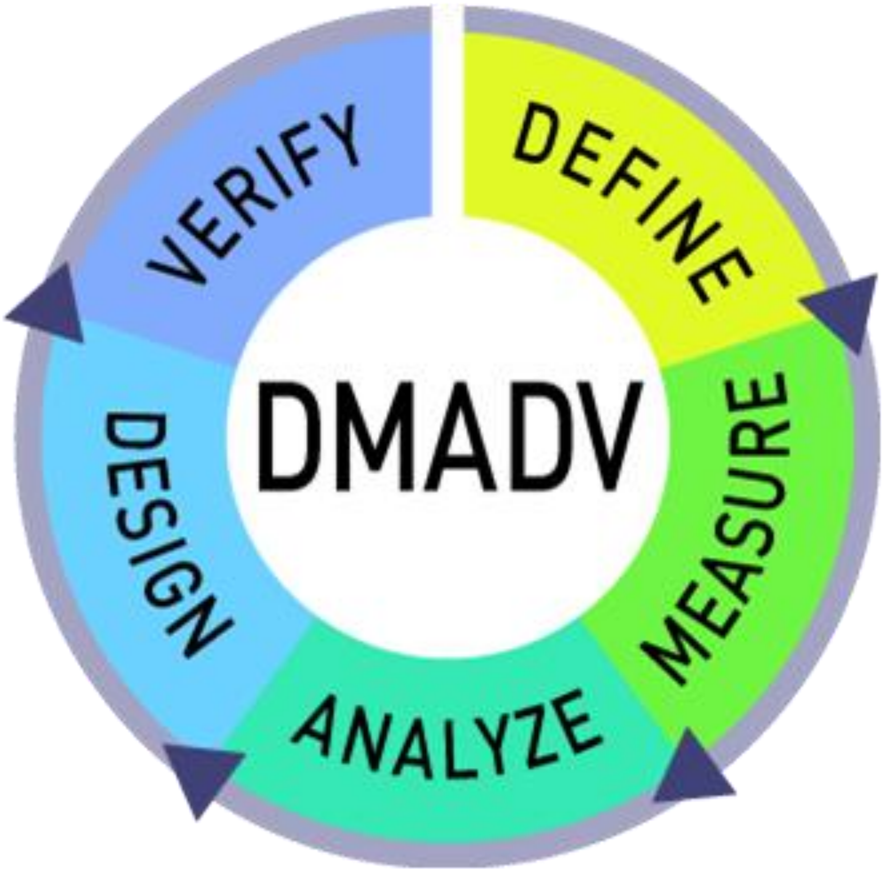
Skupna kratica za tih pet koraka je DMAIC (eng. *Define, Measure, Analyze, Improve, Control* - DMAIC) [Slika 16].

Slika 16. DMAIC metodologija [35]

Treća osnovna metodologija je konstrukcija i/ili rekonstrukcija procesa. Ona također obuhvaća pet koraka:

1. definirati
2. mjeriti
3. analizirati
4. konstruirati
5. provjeriti.

Skupna kratica za tih pet koraka je DMADV (eng. *Define, Measure, Analyze, Design, Verify* - DMADV) [Slika 17].



Slika 17. DMADV metodologija [35]

6. Prilagodba distribucije empirijskim vrijednostima

6.1. χ^2 - test

χ^2 - test je široko primjenjivana metoda prilagodbe distribucije empirijskim vrijednostima u statističkim postupcima. Koristi se u slučaju ispitivanja oblika razdiobe osnovnog skupa iz kojeg potječe promatrani uzorak. Ima tri glavne varijante:

1. χ^2 - test nezavisnosti
2. χ^2 - test prilagodbe raspodjele empirijskim podacima
3. χ^2 - test homogenosti.

6.1.1. χ^2 - test nezavisnosti

χ^2 - test nezavisnosti se koristi u slučaju analize dvaju kategoričkih varijabli iz iste populacije kako bi se utvrdilo postojanje neke značajne povezanosti među njima.
Primjer upotrebe χ^2 - testa nezavisnosti je predizborna anketa. Glasači mogu biti kvalificirani prema spolu (muški ili ženski) ili prema političkoj orijentaciji. Korištenjem χ^2 - testa se utvrđuje utječe li i kako spol glasača na izbor prilikom stranke.
Uvjeti za korištenje χ^2 - testa nezavisnosti su sljedeći:

- uzorkovanje je slučajno
- svaka populacija je najmanje deset puta veća od samog uzorka
- varijable iz studije su kategoričke
- ukoliko se uzorci prikazuju u tablici nepredviđenosti, formirana kao populacija x kategorije razina, očekivana frekvencija za svaku ćeliju tablice će biti najmanje pet.

Ovakav se pristup sastoji od četiri koraka:

1. postavljanje hipoteze ili pretpostavke
2. formuliranje plana analize
3. analiza prikupljenih uzoraka
4. interpretacija rezultata.

Postavljanje hipoteze se vrši tako da se pretpostavlja da varijabla A ima r razina, a varijabla B c razina. Nulta hipoteza tvrdi da poznavanje razine varijable A ne može pomoći prilikom predviđanja razine varijable B. To znači da su varijable nezavisne. U tom slučaju postoje dvije pretpostavke:

H_0: Varijable A i B su nezavisne

H_a: Varijable A i B su zavisne.

Druga je pretpostavka da poznavanje razine varijable A može pomoći prilikom predviđanja razine varijable B.

Sljedeći korak je formiranje plana analize. Plan analize daj upute o tome na koji način iskoristiti uzorak u svrhu prihvaćanja ili odbacivanja nulte hipoteze. Treba obuhvaćati sljedeće elemente:

- razinu značajnosti - najčešće iznosi 0,01, 0,05, 0,10 ili između 0 i 1
- metodu ispitivanja - korištenjem χ^2 - testa nezavisnosti se utvrđuje postojanje značajne povezanosti između dvaju kategoričkih varijabli.

Zatim se vrši analiza promatranih podataka. Koristeći uzorak, pronalazi se stupanj slobode, očekivana frekvencija, parametar testa i P - vrijednost povezana s parametrom testa.

Stupanj slobode se računa prema sljedećoj jednadžbi:

$$DF = (r-1) * (c-1) \tag{6.1}$$

gdje je:

- r - broj razina jedne varijable
- c - broj razina druge varijable.

Očekivana frekvencija se računa zasebno za svaku razinu pojedine varijable:

$$E_{r,c} = \frac{n_r * n_c}{n} \tag{6.2}$$

gdje je :

- $E_{r,c}$ - očekivana frekvencija za razinu r varijable A i razinu c varijable B
- n_r - ukupan broj uzoraka za razinu r varijable A
- n_c - ukupan broj uzoraka za razinu c varijable B
- n - ukupan broj uzoraka.

Parametar testa se računa prema sljedećem izrazu:

$$\chi^2 = \sum \left[\frac{(O_{r.c} - E_{r,c})^2}{E_{r.c}}\right] \tag{6.3}$$

gdje je:

- $O_{r.c}$ - promatrana frekvencija za razinu r varijable A i razinu c varijable B
- $E_{r,c}$ - očekivana frekvencija za razinu r varijable A i razinu c varijable B.

P* - *vrijednost je vjerojatnost promatranja parametra uzorka ekstremno poput parametra testa. Nakon toga slijedi interpretacija rezultata. Ovisno o rezultatima analize prikupljenih uzoraka, nulta hipoteza se ili odbacuje ili prihvaća. Najčešće se vrši usporedba P - vrijednosti s razinom značajnosti, te ukoliko je ona manja od razine značajnosti nulta hipoteza se odbacuje.

6.1.2. χ^2 - test prilagodbe raspodjele empirijskim podacima

χ^2 - test prikladnosti uzorka se koristi u slučaju analize jedne kategoričke varijable iz jedne populacije u svrhu utvrđivanja konzistentnosti uzorka s pretpostavljenom distribucijom. Primjer upotrebe χ^2 - test prikladnosti uzorka je printanje kartica za kolekcionare. Proizvođač tvrdi da je 80% kartica normalne vrijednosti, a 20% kartica je vrjednije od ostalih. Prikupljanjem uzorka kartica se može utvrditi da li proizvođač ispunjava svoje tvrdnje.
Uvjeti za korištenje χ^2 - testa prikladnosti uzorka su sljedeći:

- uzorkovanje je slučajno
- populacija je barem deset puta veća od uzorka
- proučavana varijabla je kategorička
- očekivani broj opažanja za svaku razinu varijable iznosi najmanje pet.

Četiri su faze provođenja χ^2 - testa jednog uzorka:

1. postavljanje hipoteze ili pretpostavke
2. formuliranje plana analize
3. analiza prikupljenih podataka
4. interpretacija rezultata.

U prvom se koraku vrši postavljanje nulte i alternativne hipoteze, koje su međusobno isključive. To znači da ukoliko je jedna točna, druga mora biti kriva, i suprotno. Te dvije hipoteze su:
H_0: podaci su u skladu s određenom distribucijom
H_a: podaci nisu u skladu s određenom distribucijom.
Uobičajeno je da nulta hipoteza H_0 određuje udio promatranja na svakoj razini kategoričke varijable, a alternativna hipoteza H_a da barem jedan od navedenih razmjera nije istinit.
Zatim se formulira plan analize koji daje upute o tome na koji način iskoristiti uzorak u svrhu prihvaćanja ili odbacivanja nulte hipoteze. Treba obuhvaćati sljedeće elemente:

- razinu značajnosti - najčešće iznosi 0,01, 0,05, 0,10 ili između 0 i 1

- metodu ispitivanja - korištenjem χ^2 - testa prikladnosti uzorka se utvrđuje da li se učestalost promatranog uzorka značajno razlikuje od očekivane frekvencije navedene u nultoj hipotezi.

Koristeći uzorak, pronalazi se stupanj slobode, očekivana frekvencija, parametar testa i P - vrijednost povezana s parametrom testa, što predstavlja korak analize prikupljenih podataka. ***Stupanj slobode*** se računa prema sljedećem izrazu:

$$DF = k - 1 \tag{6.4}$$

Očekivana frekvencija se računa pomoću jednadžbe:

$$E_i = np_i \tag{6.5}$$

gdje je:

- E_i - očekivana frekvencija za i-tu razinu kategoričke varijable
- n - ukupna veličina uzorka
- p_i - pretpostavljena frekvencija za i-tu razinu kategoričke varijable.

Parametar testa se određuje prema:

$$\chi^2 = \sum \left[\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \right] \tag{6.6}$$

gdje je:

- O_i - promatrana frekvencija za i-tu razinu kategoričke varijable
- E_i - očekivana frekvencija za i-tu razinu kategoričke varijable.

P - vrijednost je vjerojatnost promatranja parametra uzorka ekstremno poput parametra testa. Ovisno o rezultatima analize prikupljenih uzoraka, nulta hipoteza se ili odbacuje ili prihvaća. Najčešće se vrši usporedba P - vrijednosti s razinom značajnosti, te ukoliko je ona manja od razine značajnosti nulta hipoteza se odbacuje.

6.1.3. χ^2 - test homogenosti

χ^2 - test homogenosti se koristi u slučaju analize jedne kategoričke varijable uzete iz dvije različite populacije u svrhu određivanja da li je frekvencija distribuirana identično na različitim populacijama.

Primjer upotrebe χ^2 - testa homogenosti je prilikom anketiranja o odabiru omiljenog voća među stanovnicima grada Zagreba, uzimajući uzorke iz dvaju različitih populacija, muškaraca i žena. Interpretacijom rezultata došlo bi se do zaključka o tome koliko se naklonjenost nekom voću razlikuje ovisno o tome da li je ispitanik muškog ili ženskog spola.

Uvjeti za korištenje χ^2 - testa homogenosti su sljedeći:

- uzorkovanje iz svake populacije je slučajno
- svaka je populacija najmanje deset puta veća od uzorka prikupljenog iz nje
- ispitivana varijabla je kategorička
- ukoliko se uzorci prikazuju u tablici nepredviđenosti, formirana kao populacija x kategorije razina, očekivana frekvencija za svaku ćeliju tablice će biti najmanje pet.

Četiri su faze provođenja χ^2 - testa homogenosti:

1. postavljanje hipoteze ili pretpostavke
2. formuliranje plana analize
3. analiza prikupljenih podataka
4. interpretacija rezultata.

Svaki test hipoteze nalaže istražitelju postavljanje nulte i alternativne hipoteze koje su međusobno isključive.

H_0: iz svake je populacije uzet jednak broj uzoraka

H_a: iz svake je populacije uzet različit broj uzoraka.

Nakon toga slijedi formuliranje plana analize. Plan analize daj upute o tome na koji način iskoristiti uzorak u svrhu prihvaćanja ili odbacivanja nulte hipoteze. Treba obuhvaćati sljedeće elemente:

- razinu značajnosti - najčešće iznosi 0,01, 0,05, 0,10 ili između 0 i 1
- metodu ispitivanja - korištenjem χ^2 - testa homogenosti se utvrđuje da se li učestalost promatranog uzorka značajno razlikuje od očekivane frekvencije navedene u nultoj hipotezi.

Sljedeći korak je analiza prikupljenih podataka. Koristeći uzorak, pronalazi se stupanj slobode, očekivana frekvencija, parametar testa i P - vrijednost povezana s parametrom testa.

Stupanj slobode se računa prema sljedećoj jednadžbi:

$$DF = (r - 1) * (c - 1) \tag{6.7}$$

gdje je:

- r - broj populacija
- c - broj razina kategoričke varijable.

Očekivana frekvencija se računa odvojeno za svaku populaciju prema sljedećem izrazu:

$$E_{r,c} = \frac{n_r * n_c}{n} \tag{6.8}$$

gdje je:

- $E_{r,c}$ - očekivana frekvencija za populaciju r na razini c kategoričke varijable
- n_r - ukupan broj uzoraka iz populacije r
- n_c - ukupan broj uzoraka razine c
- n - ukupan broj uzoraka.

Parametar testa je definiran prema sljedećoj jednadžbi:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_{r.c} - E_{r,c})^2}{E_{r,c}} \tag{6.9}$$

gdje je:

- $O_{r.c}$ - promatrana frekvencija iz populacije r za razinu c kategoričke varijable
- $E_{r,c}$ - očekivana frekvencija iz populacije r za razinu c kategoričke varijable.

P - vrijednost je vjerojatnost promatranja parametra uzorka ekstremno poput parametra testa. Ovisno o rezultatima analize prikupljenih uzoraka, nulta hipoteza se ili odbacuje ili prihvaća. Najčešće se vrši usporedba P - vrijednosti s razinom značajnosti, te ukoliko je ona manja od razine značajnosti nulta hipoteza se odbacuje.

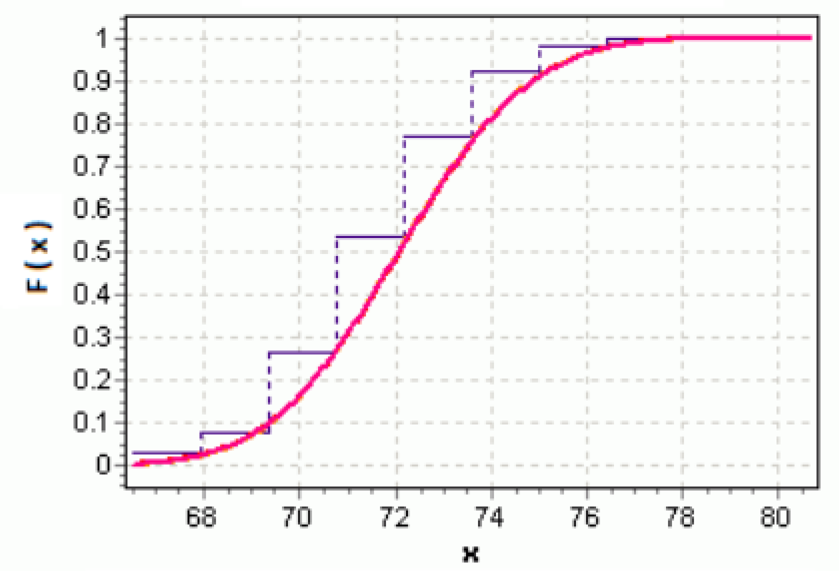
6.2. Kolmogorov-Smirnov test

Kolmogorov-Smirnov test dvaju uzoraka je neparametarski test uspoređivanja kumulativnih raspodjela dvaju skupina podataka. Isto se kao i $\mathcal{X}^2$ - test koristi slučaju ispitivanja oblika razdiobe osnovnog skupa iz kojeg potječe promatrani uzorak. Postoje dvije vrste Kolmogorov-Smirnov testa:

1. Kolmogorov-Smirnov prikladnosti uzorka
2. Kolmogorov-Smirnov test dvaju uzoraka.

6.2.1. Kolmogorov-Smirnov test jednog uzorka

Kolmogorov-Smirnov prikladnosti uzorka se koristi u slučaju kada je potrebno utvrditi potječe li uzorak iz populacije koju obilježava određena distribucija [28]. Temelji se na empirijskoj funkciji distribucije (eng. *Empirical Distribution Function* - ECDF) [Slika 18].



Slika 18. Empirijska funkcija distribucije vjerojatnosti [35]

Kolmogorov-Smirnov test ima određena, dolje navedena ograničenja:

- vrijedi samo u slučajevima kontinuirane razdiobe
- više je osjetljiv u blizini centra razdiobe nego na repovima
- primjenjiv je samo u slučajevima kada je razdioba potpuno definirana.

Kolmogorov-Smirnov test je definiran na sljedeći način [28]:

1. H_0: podaci slijede određenu raspodjelu
2. H_a: podaci ne slijede određenu raspodjelu
3. α - stupanj značajnosti
4. kritične vrijednosti - hipoteza vezana za vrstu distribucije se odbacuje ukoliko je parametar testa, D, veći od kritične vrijednosti dobivene iz tablice
5. parametar testa je definiran kao:

$$D = \max_{1 \leq x \leq N} \left(F(Y_i) - \frac{i-1}{N}, \frac{i}{N} - F(Y_i)\right) \quad (6.10)$$

6.2.2. Kolmogorov-Smirnov test dvaju uzoraka

Kolmogorov-Smirnova test dvaju uzoraka je neparametarski, što znači da ne pretpostavlja da su podaci uzeti iz Gaussove raspodjele, niti bilo koje druge [27].

Karakteristike Kolmogorov-Smirnov testa dvaju uzoraka su sljedeće:

- rezultati testa ostaju nepromijenjeni ukoliko se sve vrijednosti logaritmiraju ili na bilo koji drugi način transformiraju. Kako je rezultat testa najveća razlika između dvaju kumulativnih raspodjela, bilo kakva transformacija će samo protegnuti x-os distribucije, ali ne i prije navedenu maksimalnu udaljenost
- nulta hipoteza pretpostavljena u testu je da su oba uzorka uzeta iz iste populacije i s istim distribucijama. Kontrolira se bilo koja kršenje nulte hipoteze, kao što su različiti medijani, varijance ili čak distribucije.
- budući da je test više usredotočen na utvrđivanje devijacija od nulte hipoteze, manje je sposoban odrediti pomak medijana, ali više učinkovit za određivanje promjene oblika raspodjele
- kako test ne može vršiti usporedbu bilo kojih parametara, ne daje nikakve rezultate o intervalu pouzdanosti
- nije ga dobro koristiti ukoliko su rezultati testa kategorički, s mnogo veza
- koristi se za određivanje omjera i intervala podataka, gdje su pojave veza rijetke.

Kolmogorov-Smirnov test dvaju uzoraka se koristi kako bi se došlo da zaključka o tome dolaze li dva uzorka iz iste razdiobe. Definiran je na sljedeći način [29]:

1. H_0: oba uzorka dolaze iz populacije s jednakom razdiobom
2. H_a: oba uzorka ne dolaze iz populacije s jednakom razdiobom
3. prvi uzorak je veličine m i ima funkciju razdiobe F(x)
4. drugi uzorak je veličine n i ima funkciju razdiobe G(x)
5. parametar testa je definiran kao:

$$D_{m.n} = \max_x |F(x) - G(x)| \tag{6.11}$$

Nulta pretpostavka H_0 se odbacuje ukoliko vrijedi:

$$D_{m.n} > D_{m.n.a} \tag{6.12}$$

Pod pretpostavkom da su m i n dovoljno veliki vrijedi:

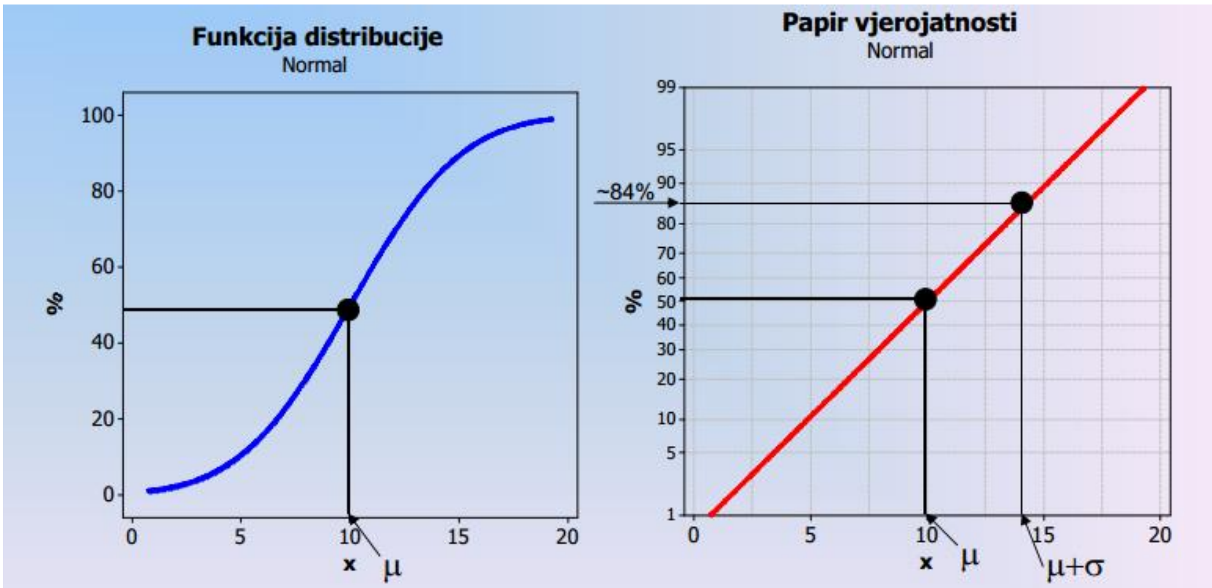
$$D_{m.n.a} = c(\alpha)\sqrt{\frac{m+n}{mn}} \tag{6.13}$$

gdje je:

- $c(\alpha)$ inverz Kolmogorove distribucije pri stupnju značajnosti α.

6.3. Papir vjerojatnosti

Papir vjerojatnosti je grafička metoda analize podataka kontinuiranog obilježja [7]. Pomoću njega se određuje da li se podaci ponašaju po nekoj određenoj razdiobi i utvrđuju iznosi odstupanja pojedinih elemenata. Papir vjerojatnosti je moguće konstruirati za svaku pojedinu razdiobu. Pri tome se najčešće koristi papir vjerojatnosti normalne razdiobe.
Papir vjerojatnosti se oblikuje na način da se formira pravac na osnovi funkcije distribucije željene raspodjele promjenom njenog mjerila. Takav se pravac naziva Henry-jev pravac.
Na donjoj je slici dan prikaz papira vjerojatnosti normalne razdiobe [Slika 19].

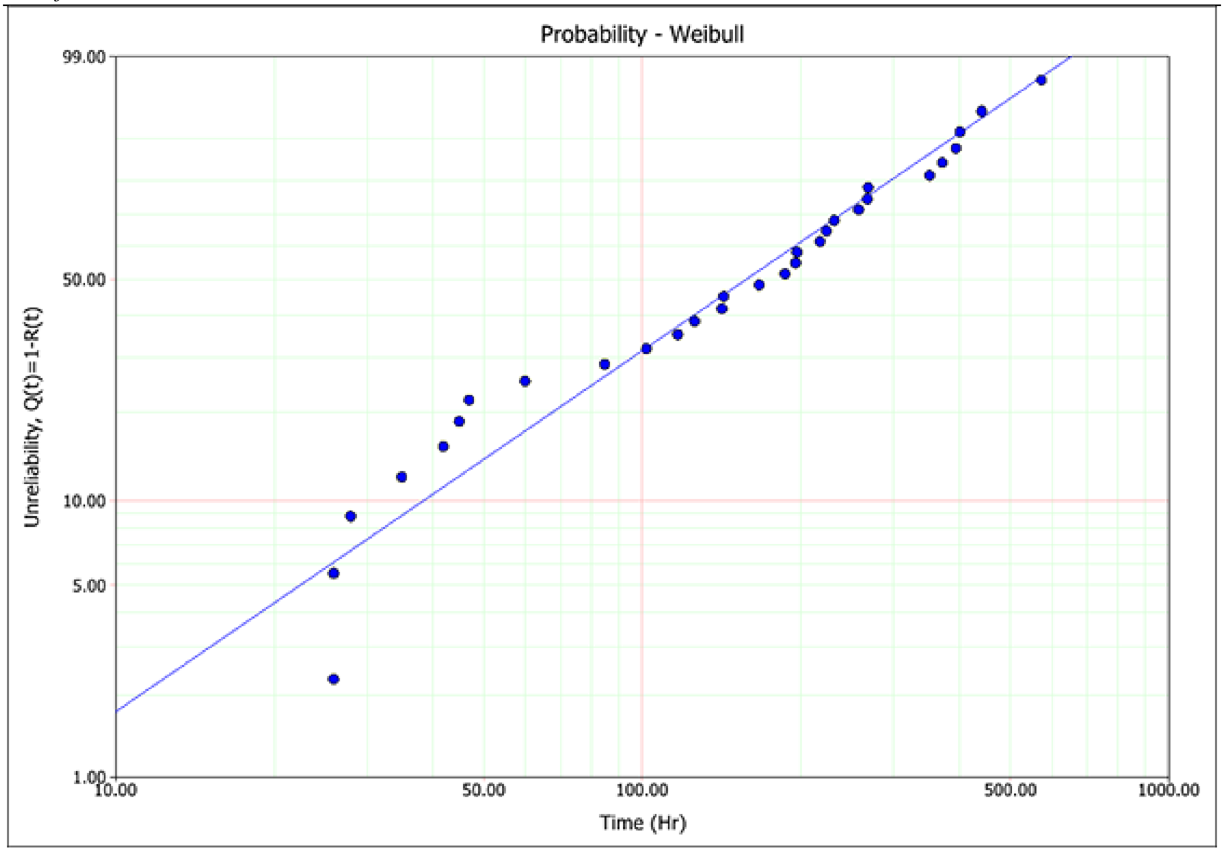


Slika 19. Funkcija distribucije normalne razdiobe i pripadajući papir vjerojatnosti [7]

Henry-jev pravac je ucrtan na način da su odabrane dvije točke:

1. $x = \mu, y = 50\%$
2. $x = \mu + \sigma, y = 84\%$.

Kako je prije navedeno, papir vjerojatnosti se može konstruirati za različite razdiobe. Na donjoj je slici prikazan papir vjerojatnosti Weibull-ove raspodjele [Slika 20].



Slika 20. Papir vjerojatnosti Weibull-ove raspodjele [35]

6.4. Anderson-Darling test

Anderson-Darling test se koristi u slučajevima kada uzorak potječe iz populacije određene, poznate distribucije [30]. Proizlazi iz Kolmogorov-Smirnov testa, s tim da veću važnost pridodaje repovima distribucije. Kolmogorov-Smirnov test je neovisan o vrsti distribucije, u smislu da kritične vrijednosti ne ovise o specifičnoj distribuciji koja se ispituje. Suprotno od toga, Anderson-Darling uzima u obzir specifičnu distribuciju prilikom računanja kritičnih vrijednosti. To za posljedicu ima veću osjetljivost testa, zbog čega kritične vrijednosti moraju biti izračunate za svaku distribuciju zasebno.

Anderson-Darling test je definiran na sljedeći način:

1. H_0: uzorak prati određenu razdiobu
2. H_1: uzorak ne prati određenu razdiobu
3. kritična regija - kritične vrijednosti za Anderson-Darling test ovise o specifičnoj razdiobi koja se testira
4. parametar testa je definiran kao:

$$A^2 = -N - S \tag{6.14}$$

gdje je:

- $S = \sum_{i=1}^{N} \frac{(2i-1)}{N} [\ln F(Y_i) + \ln(1 - F(Y_{N+1-i}))]$.

Anderson Darling test može odgovoriti na pitanja kao što su:

- slijede li podaci normalnu razdiobu?
- slijede li podaci lognormalnu razdiobu?
- slijede li podaci Weibull-ovu razdiobu?
- slijede li podaci logaritamsku razdiobu?
- je li distribucija vjerojatnosti kontinuirana?

Pretpostavka ponašanja podataka prema normalnoj razdiobi je najčešća u klasičnim statističkim testovima, dok se modeliranje pouzdanosti vodi Weibull-ovom razdiobom. Iako su neki proces zadovoljavajući neovisno o poznavanju razdiobe na temelju koje funkcioniraju, preferabilno je postojanje mogućnosti točnog određivanja distribucije podataka.

7. Analiza varijance - ANOVA

Analiza varijance (eng. *Analysis of Variance* - ANOVA) se definira kao postupak usporedbe više uzoraka, s tim da svaki uzorak predstavlja osnovni skup ili populaciju [8]. U proizvodnim i tehničkim sustavima ANOVA predstavlja postupak provjere djelovanja promjene stanja nekog faktora na mjerenu vrijednost, to jest rezultat. Koristeći ANOVU dolazi se to opažanja o promjeni aritmetičke sredine uzoraka.

7.1. Analiza varijance s jednim promjenjivim faktorom

Dvije su vrste analize varijance s jednim promjenjivim faktorom [31]:

1. analiza varijance s fiksnim faktorom
2. analiza varijance sa slučajnim faktorom.

U varijanti analize varijance s fiksnim faktorom uzorak je odabran od strane istraživača, to jest broj faktora i njihove razine su prije definirane. U tom slučaju, testiranjem hipoteze se dolazi do zaključaka koji su primjenjivi isključivo na razine faktora korištene u analizi.
U varijanti analize varijance sa slučajnim faktorom broj faktora i razine faktora su odabrane iz veće populacije. U tom slučaju se zaključci dobiveni eksperimentom mogu upotrijebiti na sve uzorke iz populacije.
Model analize varijance u slučaju jednog utjecajnog faktora definiran je na sljedeći način [8]:

$$x_{ij} = \mu + \Delta\overline{x_j} \mp \varepsilon_{ij} \tag{7.1}$$

gdje je:

- x_{ij} - vrijednog i-tog mjerenja u j-om stupcu
- μ - aritmetička sredina svih podataka
- $\Delta\overline{x_j}$ - doprinos aritmetičke sredine j-tog uzorka
- ε_{ij} - slučajno odstupanje unutar uzorka.

Pretpostavka je da se slučajna odstupanja unutar uzorka ponašaju prema normalnoj razdiobi:

$$\varepsilon_{ij} \to \mathrm{N}\left\{E\left(\varepsilon_{ij}\right) = 0; \sigma^2_{(\varepsilon_{ij})}\right\} \tag{7.2}$$

7.1.1. Dekompozicija sume kvadrata odstupanja (SKO)

Naziv analiza varijance potječe od ideje razdvajanja ukupne varijabilnosti na njene sastavne dijelove: sumu kvadrata razlika između uzoraka i sumu kvadrata razlika unutar uzoraka. Ukupna varijabilnost se prikazuje na sljedeći način:

$$SKO_{UKUPNO} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \mu)^2 \tag{7.3}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \rightarrow \sum_{i,j} \tag{7.4}$$

Kvadrirani binom ukupne sume kvadrata odstupanja iznosi:

$$SKO_{UKUPNO} = \sum_{i,j} (x_{ij} - \overline{x_J} + \overline{x_J} - \mu)^2 \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} (x_{ij} - \overline{x_J} + \overline{x_J} - \mu)^2 \\ &\quad = \sum_{i,j} (x_{ij} - \overline{x_J})^2 + \sum_{i,j} (\overline{x_J} - \mu)^2 + 2 * \sum_{i,j} \left(x_{ij} - \overline{x_J}\right) * (\overline{x_J} - \mu) \end{aligned} \tag{7.6}$$

$$\left(\overline{x_J} - \mu\right) = 0 \tag{7.7}$$

$$\sum_{i,j} (x_{ij} - \overline{x_J} + \overline{x_J} - \mu)^2 = \sum_{i,j} (x_{ij} - \overline{x_J})^2 + \sum_{i,j} (\overline{x_J} - \mu)^2 \tag{7.8}$$

Gore prikazana jednadžba prikazuje prije navedenu raščlambu ukupne varijabilnosti na varijabilnost između uzoraka i varijabilnost unutar uzoraka:

$$SKO_{UKUPNO} = SKO_{UNUTAR\ UZORAKA} + SKO_{IZMEĐU\ UZORAKA} \tag{7.9}$$

Ako broj razina uzoraka označimo s k, a broj podataka s N, $SKO_{UNUTAR\ UZORAKA}$ ima broj stupnjeva slobode k - 1, dok $SKO_{IZMEĐU\ UZORAKA}$ ima broj stupnjeva slobode N - k. Iz toga proizlazi srednji kvadrat odstupanja između uzoraka koji se računa prema sljedećoj jednadžbi:

$$s^s_{između\ uzoraka} = \frac{SKO_{IZMEĐU\ UZORAKA}}{k-1} \tag{7.10}$$

te srednji kvadrat odstupanja unutar uzoraka:

$$s^2_{unutar\ uzoraka} = \frac{SKO_{UNUTAR\ UZORAKA}}{N-k} \tag{7.11}$$

Dvije hipoteze koje se postavljaju u metodi analize varijance s jednim promjenjivim faktorom su:

1. H_0: $\Delta\overline{x_1} = \Delta\overline{x_2} = \cdots = \Delta\overline{x_k} = 0$
2. H_a: bar jedan $\Delta\overline{x_j} \neq 0$.

Za provjeru gornje hipoteze H_0 se koriste varijance $s^s_{između\ uzoraka}$ i $s^2_{unutar\ uzoraka}$ te F-test

$$F = \frac{s^s_{između\ uzoraka}}{s^2_{unutar\ uzoraka}} \tag{7.12}$$

Varijabla F-razdiobe ima stupnjeve slobode:

$$k_b = n_1 - 1 \tag{7.13}$$

$$k_n = n_2 - 1 \tag{7.14}$$

Parametar F-raspodjele se zatim uspoređuje s teorijskom vrijednošću F_0. Ukoliko je

$$F > F_0$$

hipoteza H_0 se odbacuje uz vjerojatnost pogreške α.

Izračuni za ovaj test su prikazani u sljedećoj tablici [Tablica 5].

Tablica 5. ANOVA tablica s jednim promjenjivim faktorom

Izvor varijacije	Suma kvadrata odstupanja	Stupnjevi slobode	Srednji stupanj kvadrata odstupanja	F
Između uzoraka (faktor)	$SKO_{između}$	k-1	$s^2_{između}$	$s^2_{između}/s^2_{ostatak}$
Unutar uzoraka (ostatak)	$SKO_{ostatak}$	N-k	$s^2_{ostatak}$	-
UKUPNO:	SKO_{ukupno}	N-1	-	-

7.2. Analiza varijance s dva promjenjiva faktora

Analiza varijance s dva promjenjiva faktora se koristi s ciljem određivanja utjecaja promjene stanja dva proizvodna faktora na mjerenu vrijednost, odnosno rezultat. Pretpostavke za matematički model su sljedeće:

- *A* i *B* su fiksni faktori
- *a* je broj razina faktora *A*
- *b* je broj razina faktora *B*
- x_i je ukupan broj zapažanja *i*-te razine faktora *A*
- x_j je ukupan broj zapažanja *j*-te razine faktora *B*
- x_{ij} je ukupan broj zapažanja ćelije razine *ij*
- x je ukupan zbroj svih mjerenja faktora, odnosno zapažanja
- $\overline{x_i}$ je aritmetička sredina odgovarajućeg reda
- $\overline{x_j}$ je aritmetička sredina odgovarajućeg stupca
- $\overline{x_{ij}}$ je aritmetička sredina odgovarajuće ćelije
- $\bar{x}$ je ukupna aritmetička sredina.

7.2.1. Dekompozicija sume kvadrata odstupanja (SKO)

Iz ovih pretpostavki slijedi:

$$x_i = \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} \quad \overline{x_i} = \frac{x_i}{bn}, i = 1,2,\ldots,a \tag{7.15}$$

$$x_j = \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} \quad \overline{x_i} = \frac{x_i}{an}, j = 1,2,\ldots,b \tag{7.16}$$

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} \quad \overline{x_{ij}} = \frac{x_{ijk}}{n}, i = 1,2, \dots, a; j = 1,2, \dots, b \tag{7.17}$$

$$x = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} \quad \bar{x} = \frac{x}{abn} \tag{7.18}$$

Kod ovih je pretpostavki faktor A na i-toj razini (i=1,2,...,a), a faktor B na j-oj razini (j=1,2,...,b) za k-ti proizvod (k=1,2,...,n).

Hipoteze se zatim testiraju koristeći dekompoziciju sume kvadrata odstupanja SKO. Ukupna je varijabilnost jednaka ukupnoj sumi kvadrata odstupanja faktora A (redci), sumi kvadrata odstupanja faktora B (stupci), sumi kvadrata odstupanja interakcije između faktora A i B te sumi kvadrata odstupanja ostatka:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} (x_{ijk} - \bar{x})^2 = bn \sum_{i=1}^{a} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \\ + an \sum_{j=1}^{b} (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \\ + n \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} (\overline{x_{ij}} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n} (x_{ijk} - \overline{x_{ij}})^2 \end{aligned} \tag{7.19}$$

$$SKO_{\ UKUPNO} = SKO_A + SKO_B + SKO_{AB} + SKO_{OSTATAK} \tag{7.20}$$

Stupnjevi slobode definirani su na sljedeći način:

- ukupan broj stupnjeva slobode je $abn - 1$
- stupanj slobode faktora *A* iznosi $a - 1$
- stupanj slobode faktora *B* iznosi $b - 1$
- stupanj slobode faktora interakcije između A i B iznosi $(a - 1)(b - 1)$
- stupanj slobode faktora ostatka iznosi $ab(n - 1)$.

Suma stupnjeva slobode prikazana je na donjoj jednadžbi:

$$abn - 1 = (a-1) + (b-1) + (a-1)(b-1) + ab(n-1)$$

Ukoliko se svaki član sume kvadrata odstupanja podijeli s odgovarajućim stupnjem slobode, dobije se srednji kvadrat odstupanja za faktore *A* i *B*, interakciju i ostatak:

$$s_A^2 = \frac{SKO_A}{a-1} \tag{7.21}$$

$$s_B^2 = \frac{SKO_B}{b-1} \tag{7.22}$$

$$s_{AB}^2 = \frac{SKO_{AB}}{(a-1)(b-1)} \tag{7.23}$$

$$s_{OSTATAK}^2 = \frac{SKO_{OSTATAK}}{ab(n-1)} \tag{7.24}$$

Tri hipoteze koje se postavljaju u metodi analize varijance s dva promjenjiva faktora su:

1. Po redovima: $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$ (nema glavnog učinka faktora *A*)

$$H_a: bar\ jedan\ \tau_i \neq 0$$

τ_i (i=1,2,...a) predstavlja učinak i-te razine faktora reda A. Prihvaćanjem nulte hipoteze po redovima dokazuje se jednak učinak svih razina faktora reda A.

2. Po stupcima: $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$ (nema glavnog učinka faktora *B*)

$$H_a: bar\ jedan\ \beta_i \neq 0$$

β_j (j=1,2,...,b) predstavlja učinak j-te razine faktora stupca B. Prihvaćanjem nulte hipoteze po stupcima dokazuje se jednak učinak svih razina faktora stupca B.

3. Interakcija: $H_0: (\tau\beta)_{11} = (\tau\beta)_{12} = \cdots = (\tau\beta)_{ab} = 0$ (nema interakcije)

$$H_a: bar\ jedan\ (\tau\beta)_{ij} \neq 0$$

$(\tau\beta)_{ij}$ predstavlja učinak interakcije između τ_i i β_j. Prihvaćanjem nulte hipoteze dokazuje se da nema interakcije između τ_i i β_j.

Za testiranje prve hipoteze po redovima $H_0: \tau_i = 0$ koristi se veličina F:

$$F = \frac{s_A^2}{s_{OSTATAK}^2} \tag{7.25}$$

koja ima svojstva F razdiobe s $(k_b = (a-1), k_n = ab(n-1))$ stupnjeva slobode.

Za testiranje hipoteze po stupcima $H_0: \beta_i = 0$ koristi se veličina F:

$$F = \frac{s_B^2}{s_{OSTATAK}^2} \tag{7.26}$$

koja se ponaša po F razdiobi s $(k_b = (b-1), k_n = ab(n-1))$ stupnjeva slobode.

Za testiranje treće hipoteze interakcije $H_0 = (\tau\beta)_{ij} = 0$ koristi se veličina F:

$$F = \frac{s_{AB}^2}{s_{OSTATAK}^2} \tag{7.27}$$

koja se ponaša po F razdiobi s $\big(k_b = (a-1)(b-1), k_n = ab(n-1)\big)$ stupnjeva slobode.

Nakon izračunavanja potrebnih *F* veličina one se uspoređuju s teorijskim vrijednostima F_0, te se na temelju toga donose odluke o prihvaćanju, odnosno odbacivanju pojedinih hipoteza. Ukoliko je $F \leq F_0$ nulta hipoteza se prihvaća, a ako je $F > F_0$ nulta hipoteza se odbija, to jest prihvaća se alternativna hipoteza H_a.

Izračuni testa F prikazani su u donjoj tablici [Tablica 6]:

Tablica 6. ANOVA tablica s dva promjenjiva faktora

Izvor varijacije	Suma kvadrata odstupanja	Stupnjevi slobode	Srednji stupanj kvadrata odstupanja	F
Faktor A (redovi)	SKO_A	a-1	s_A^2	$s_A^2/s_{OSTATAK}^2$
Faktor B (stupci)	SKO_B	b-1	s_B^2	$s_B^2/s_{OSTATAK}^2$
Interakcija	SKO_{AB}	(a-1)(b-1)	s_{AB}^2	$s_{AB}^2/s_{OSTATAK}^2$
Ostatak	$SKO_{OSTATAK}$	ab(n-1)	$s_{OSTATAK}^2$	-
Ukupno	SKO_{UKUPNO}	abn-1	-	-

8. Upotreba statističke analize i ANOVE

U ovom poglavlju bit će objašnjen prikaz prikupljenih podataka iz stvarnog proizvodnog sustava te način provedbe statističke analize procesa za određene parametre. Podaci predstavljaju izmjere kontaktnih razmaka i kontaktnih potencijala za tri vrste sklopki:

1. 4-položajna sklopka
2. 5-položajna sklopka
3. 7-položajna sklopka.

8.1. Osnovna obrada prikupljenih podataka

8.1.1. Numerička obrada podataka

U donjoj su tablici prikazani osnovni statistički podaci za prikupljene podatke o kontaktnim razmacima triju tipova sklopki [Tablica 7].

Tablica 7. Statistički podaci kontaktnih razmaka

Varijabla kontaktni razmak	4 položaja	5 položaja	7 položaja
N	40	40	40
$\bar{x}$	3,7150	4,0910	3,8775
σ	0,3161	0,2586	0,1884
σ^2	0,0999	0,0669	0,0355
V	8,51	6,32	4,86
min	3,2000	3,5000	3,4200
max	4,3300	4,5000	4,2700
Raspon	1,1300	1,0000	0,8500
Q_1	3,4300	3,8900	3,7125
medijan	3,7800	4,1650	3,8590
Q_3	3,9875	4,2775	4,0000
mod	3,2: 3,88	4,09	3,9; 4
koeficijent asimetrije α_3	-0,32	-0,62	-0,29
koeficijent spljoštenosti α_4	-0,98	-0,15	-0,15

Iz podataka danih u gornjoj tablici može se zaključiti kako najveću vrijednost aritmetičke sredine ima 5-položajna sklopka 4,0910 mm, dok najmanju vrijednost ima 4-položajna sklopka 3,7150 mm. Vrijednost koeficijenata asimetrije kod 4 ($\alpha_3 = -0,32$) i 7-položajne sklopke ($\alpha_3 = -0,29$) ukazuje na slabu, negativnu asimetriju, dok taj iznos kod 5-položajne sklopke ($\alpha_3 = -0{,}62$) dokazuje prisustvo srednje, negativne asimetrije u raspodjeli podataka. Najmanje je rasipanje $\sigma = 0{,}1884$ prisutno kod 7-položajne sklopke. Negativni koeficijenti spljoštenosti ukazuju na spljoštenu distribuciju podataka kod svih tipova sklopki. Minimalne i maksimalne vrijednosti su koncentrirane oko sličnih vrijednosti.

U donjoj su tablici prikazani osnovni statistički podaci za prikupljene podatke o kontaktnim pritiscima triju tipova sklopki [Tablica 8].

Tablica 8. Statistički podaci kontaktnih pritisaka

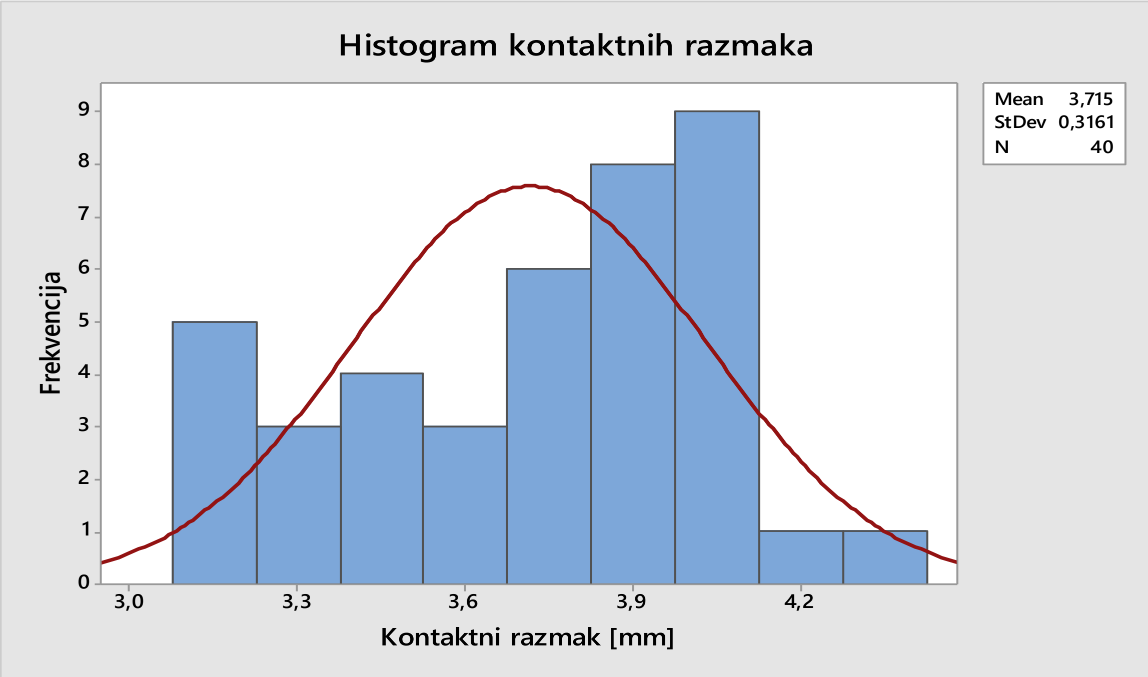
Varijabla kontaktni pritisak	4 položaja	5 položaja	7 položaja
N	40	40	40
$\bar{x}$	107,75	102,47	103,47
σ	7,24	5,95	6,80
σ^2	52,45	35,44	46,31
V	6,72	5,81	6,58
min	90,00	88,00	90,00
max	120,00	112,00	120,00
Raspon	30,00	24,00	30,00
Q_1	104,00	99,25	100,00
medijan	110,00	104,00	103,50
Q_3	113,00	106,00	109
mod	110	100	102
koeficijent asimetrije α_3	-0,85	-0,64	-0,16
koeficijent spljoštenosti α_4	0,15	-0,18	0,42

Iz podataka danih u gornjoj tablici može se zaključiti kako najveću vrijednosti aritmetičke sredine ima 4-položajna sklopka 107,75 cN, dok najmanju vrijednost ima 5-položajna sklopka 102,47 cN. Vrijednost koeficijenta asimetrije kod 7-položajne sklopke ($\alpha_3 = -0{,}16$) ukazuje na zanemarivu asimetriju, dok ta vrijednost kod 5-položajne sklopke ($\alpha_3 = -0{,}64$) upozorava na slabiju asimetriju podataka. Od tih dvaju sklopki odstupa 4-položajna sklopka, kod koje vrijednost $\alpha_3 = -0{,}85$ ukazuje na srednju asimetriju distribucije podataka. Pozitivni koeficijenti spljoštenosti kod 4 ($\alpha_4 = 0{,}15$) i 7-položajne sklopke ($\alpha_4 = 0{,}42$) pokazuju izduženost distribucije podataka, dok kod 5-položajne sklopke ta vrijednost ($\alpha_4 = -0{,}18$) ukazuje na spljoštenost. Minimalne i maksimalne vrijednosti kontaktnog potencijala kreću se oko sličnih vrijednosti.

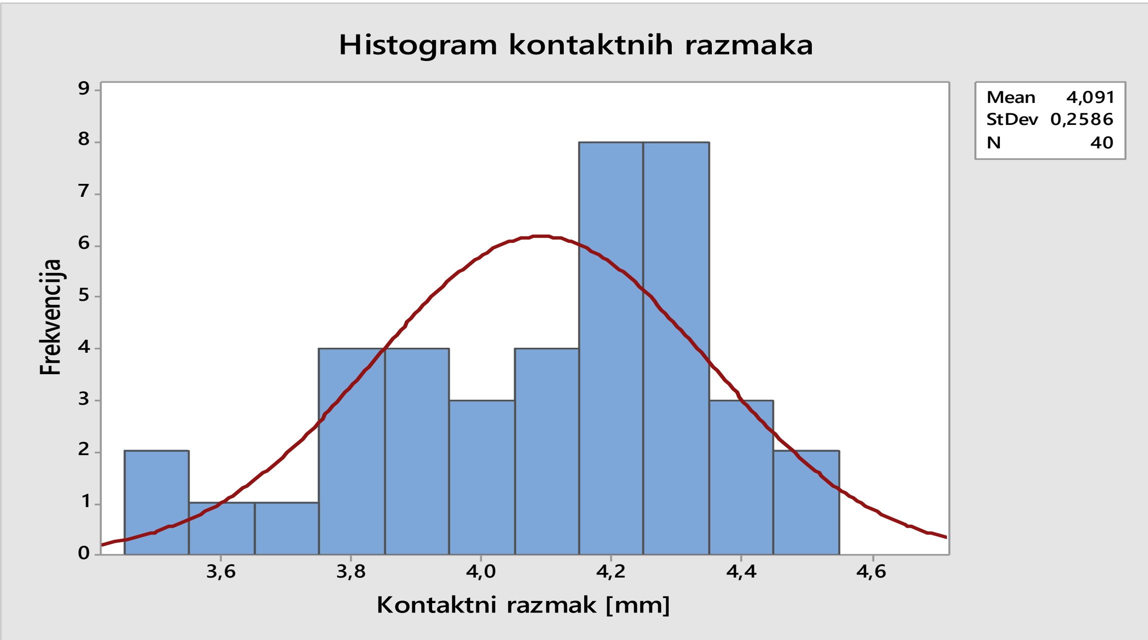
8.1.2. Histogrami frekvencije podataka

Pomoću histograma se može naslutiti vrsta distribucije podataka. Isto tako se lagano može očitati maksimalna i minimalna vrijednost podataka. Podaci su ovisno u rasponu podataka organizirani u odgovarajući broj razreda.

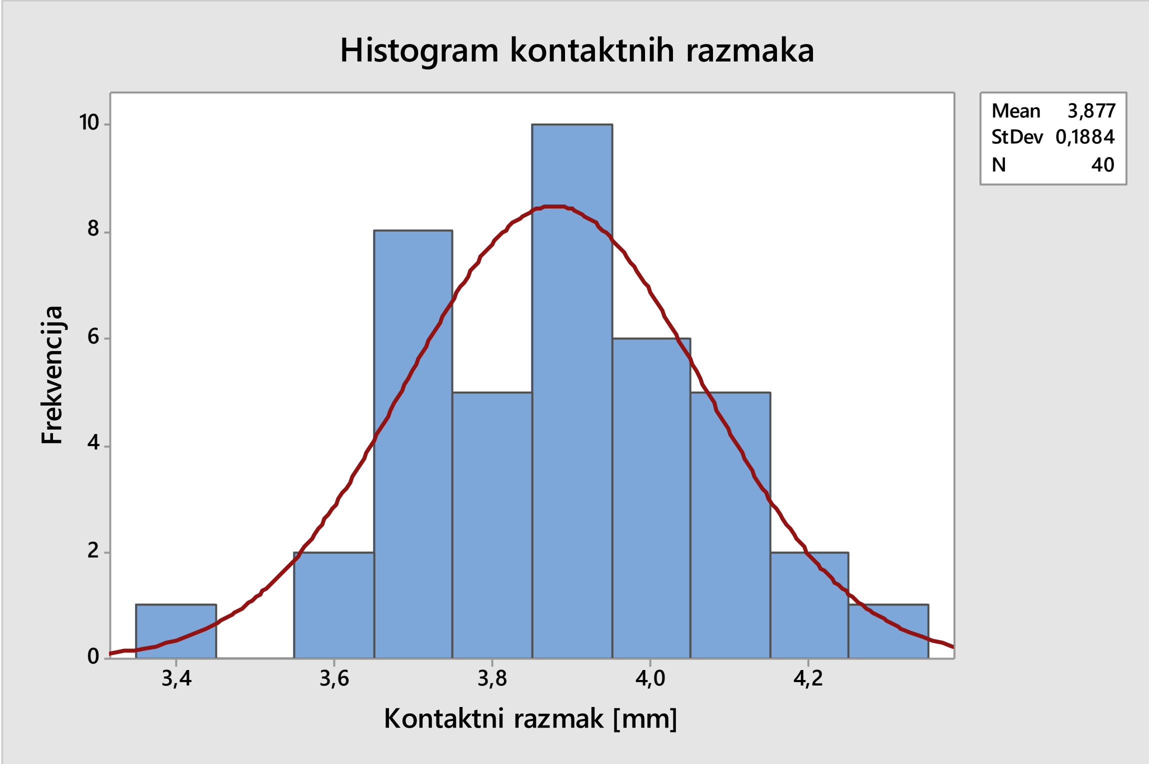
Na donjim su slikama prikazani histogrami frekvencija za kontaktne razmake i kontaktne potencijale za 4, 5 i 7-položajne sklopke.



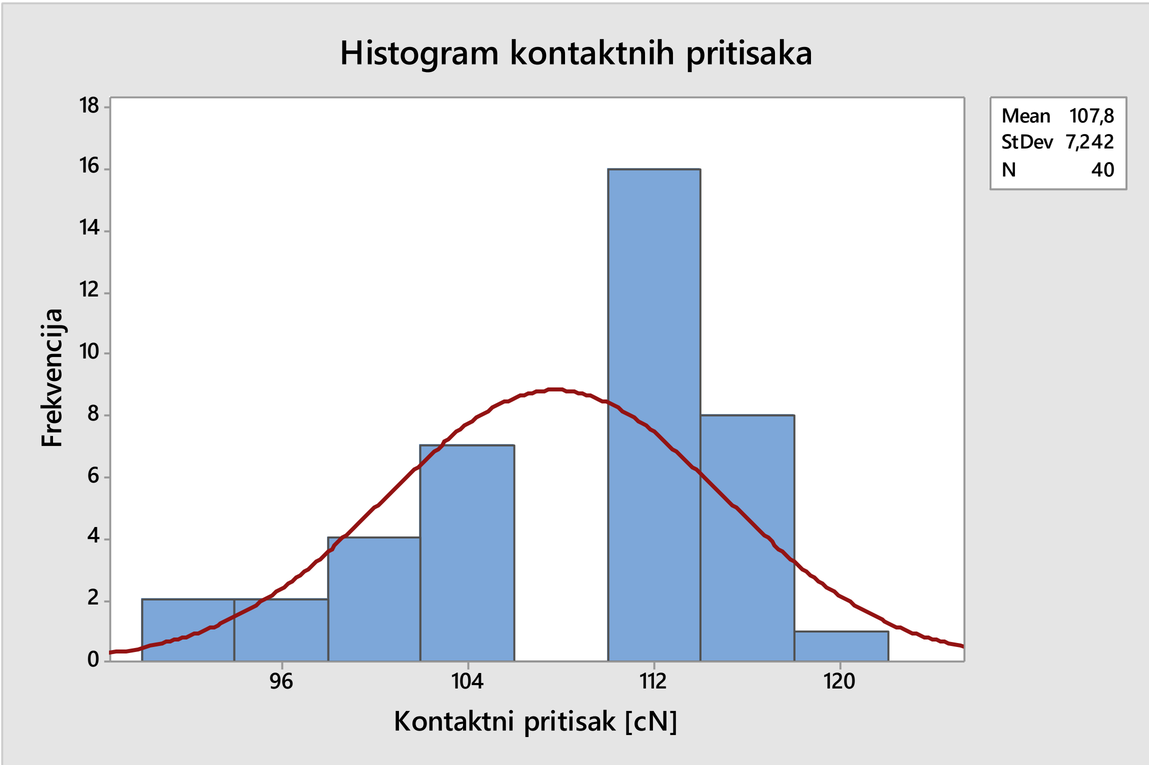
Slika 21. Histogram frekvencija kontaktnog razmaka 4-položajne sklopke



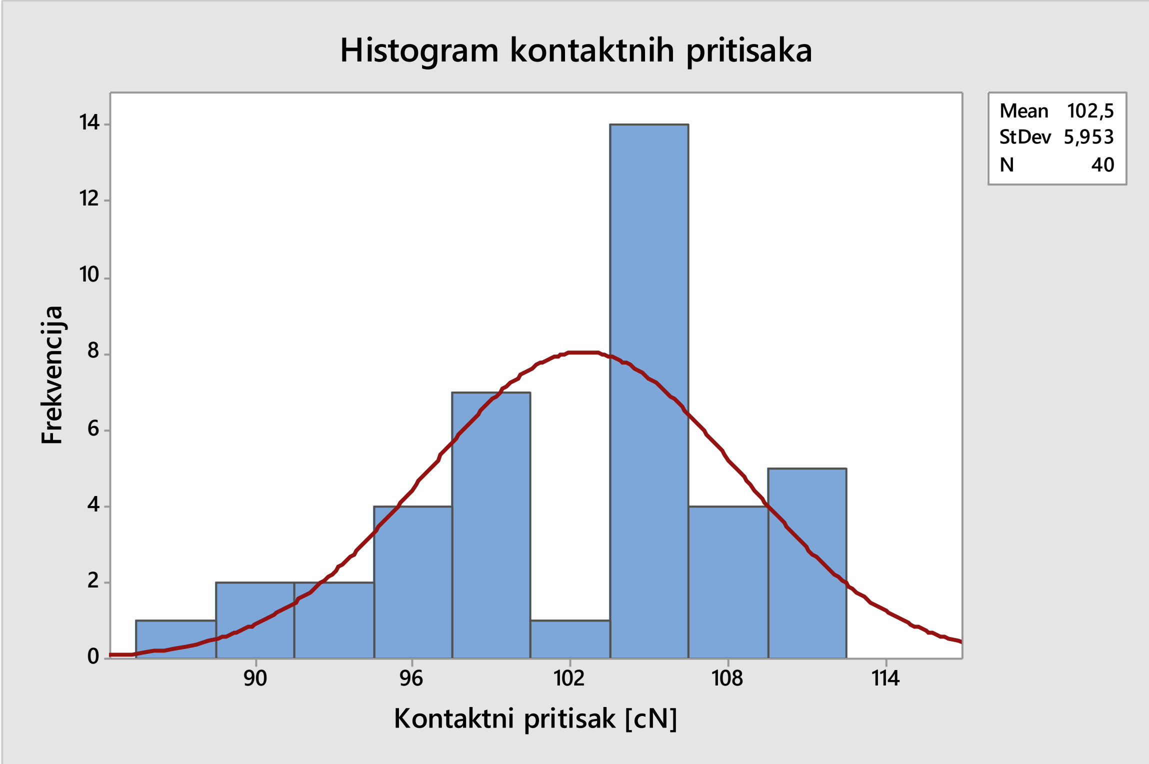
Slika 22. Histogram frekvencija kontaktnog razmaka 5-položajne sklopke



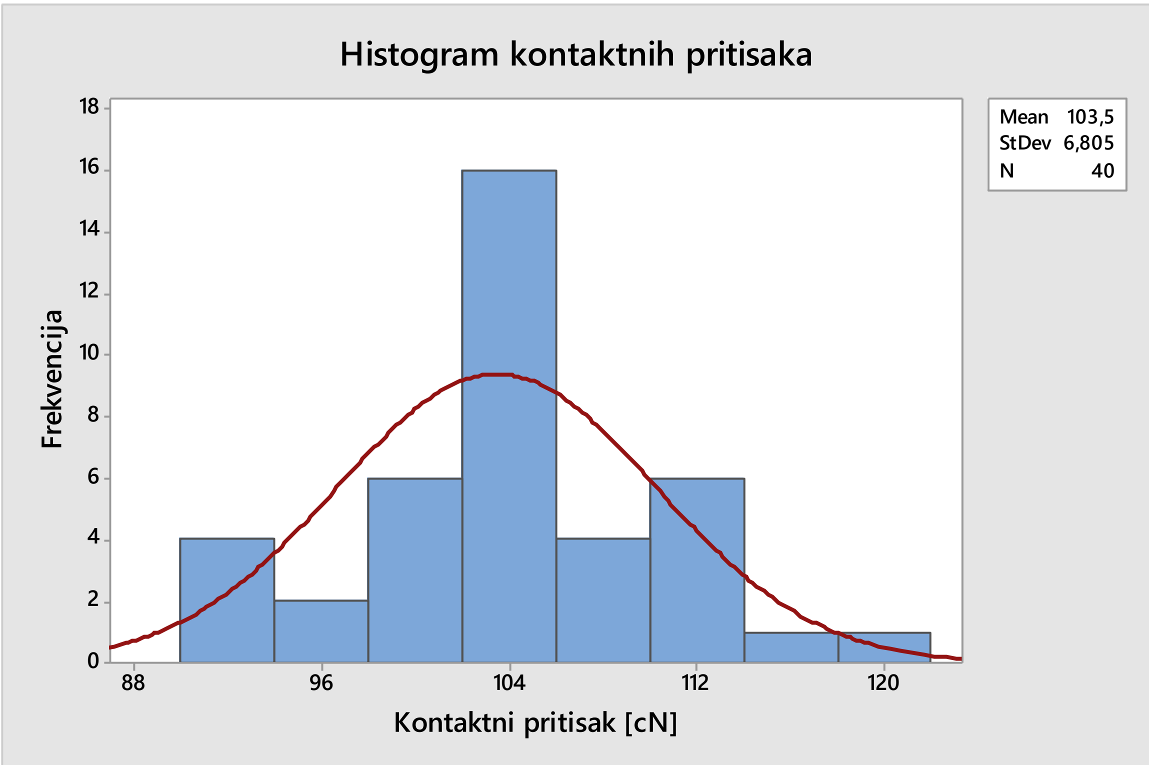
Slika 23. Histogram frekvencija kontaktnog razmaka 7-položajne sklopke



Slika 24. Histogram frekvencija kontaktnog pritiska 4-položajne sklopke



Slika 25. Histogram frekvencija kontaktnog pritiska 5-položajne sklopke



Slika 26. Histogram frekvencija kontaktnog pritiska 7-položajne sklopke

Iz gore navedenih histograma, uz dani prikaz normalne distribucije podataka, može se naslutiti slijede li podaci normalnu razdiobu ili ne. To će biti utvrđeno u sljedećem poglavlju provođenjem χ^2 testa.

8.1.3. Prilagodba raspodjele empirijskim podacima χ^2 testom

Kako prije navedeni histogrami nisu dovoljno precizni za utvrđivanje hipoteze slijede li podaci o kontaktnim razmacima i kontaktnim pritiscima normalnu razdiobu, provest će se χ^2 test. Njime ćemo s određenom sigurnošću utvrditi tu hipotezu. Razina značajnosti za sve testove iznosi $\alpha = 5\%$. Broj razreda izračunat je prema $k = 1 + 3{,}3log40 = 6{,}29 \sim 6$.

Način izračuna za sve testove je sljedeći:

1. H_0=oblik distribucije je normalan
2. H_a=oblik distribucije nije normalan
3. značajnost testa iznosi $\alpha = 0{,}05$
4. stupanj slobode za očitavanje teorijske vrijednosti χ^2 iznosi k-p-1=6-2-1=3
5. teorijska vrijednost iznosi ${\chi^2}_{0.05,3} = 0{,}35$
6. hipoteza H_0 se odbacuje ukoliko je $\chi^2 > {\chi^2}_{0.05,3} = 7{,}815$
7. t se računa prema jednadžbi:

$$t = \frac{x - \mu}{\sigma} \tag{8.1}$$

8. f(t) se računa prema jednadžbi:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}t^2} \tag{8.2}$$

9. E_i se računa prema jednadžbi:

$$E_i = \frac{N * i}{\sigma} * f(t) \tag{8.3}$$

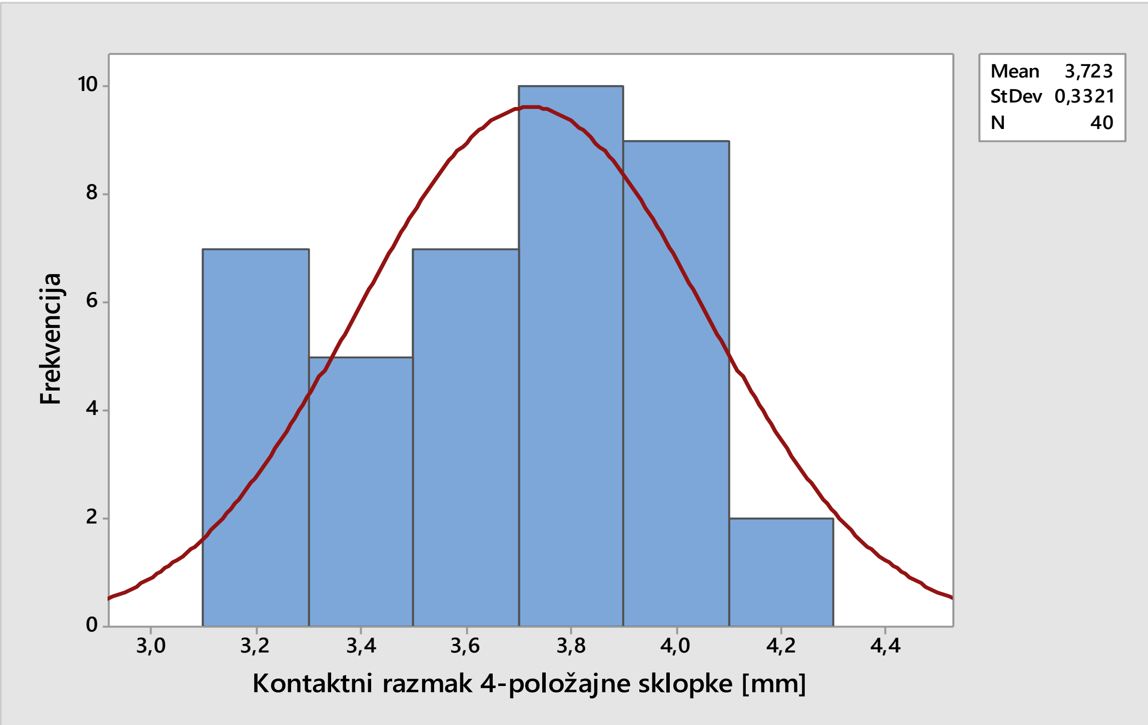
10. parametar testa se računa prema jednadžbi:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \tag{8.4}$$

gdje je:

- O_i - opažena frekvencija varijable
- E_i - očekivana frekvencija varijable.

U sljedećim je tablicama prikazan izračun χ^2 testa za kontaktne razmake i kontaktne pritiske svih triju vrsta sklopki. Isto tako je prikazan histogram frekvencija za pojedine razrede za svaki tip sklopke, u slučaju mjerenja kontaktnog razmaka i pritiska.

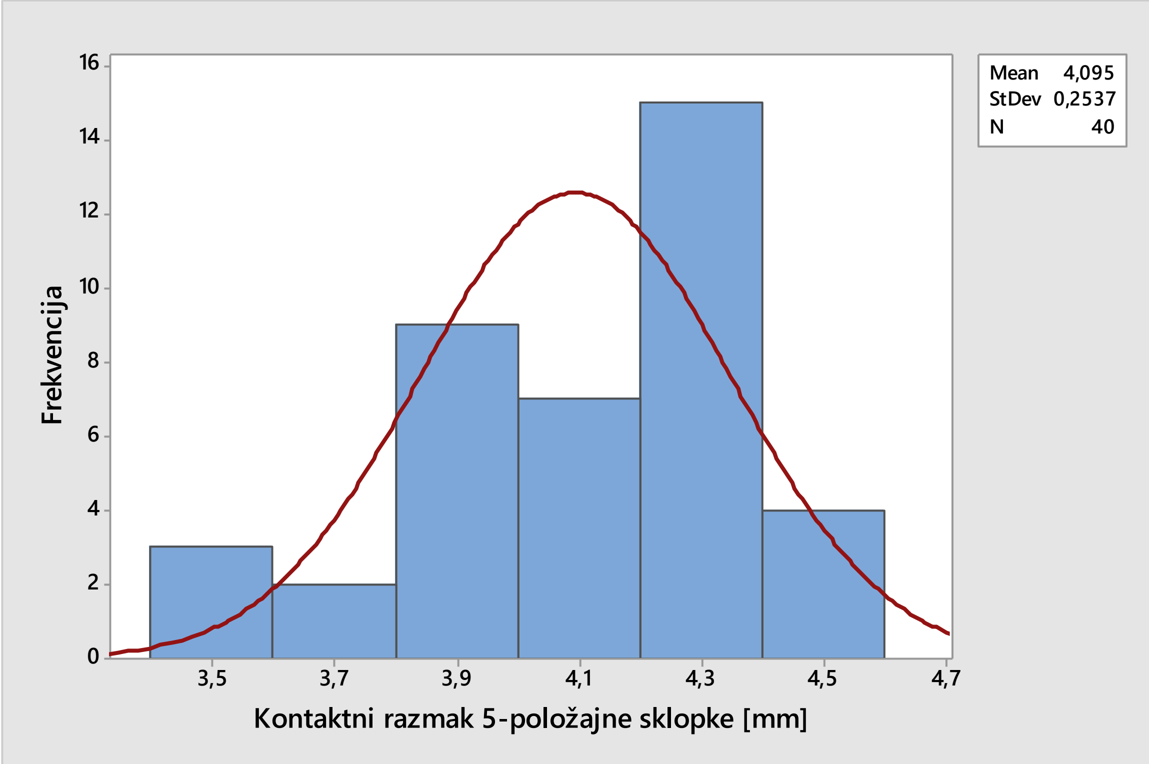


Slika 27. Histogram frekvencija kontaktnog razmaka 4-položajne sklopke

Tablica 9. Izračun χ^2 za kontaktni pritisak 4-položajne sklopke

Kontaktni razmak 4-položajne sklopke						
Razredi	x_i	t	f(t)	E_i	O_i	χ^2
3,1-3,317	3,208	-1,602	0,110	3,034	7	
3,317-3,534	3,425	-0,915	0,262	7,202	5	0,303995
3,534-3.751	3,642	-0,229	0,388	10,670	7	1,262315
3,751-3,968	3,859	0,457	0,359	9,867	10	0,001793
3,968-4,185	4,076	1,143	0,207	5,696	9	
4,185-4,4	4,292	1,826	0,075	2,064	2	1,352784
					Suma	2,920887

Izračunati je χ^2 manji od ${\chi^2}_{0.05,3}$, što znači da se nulta hipoteza H_0 prihvaća.

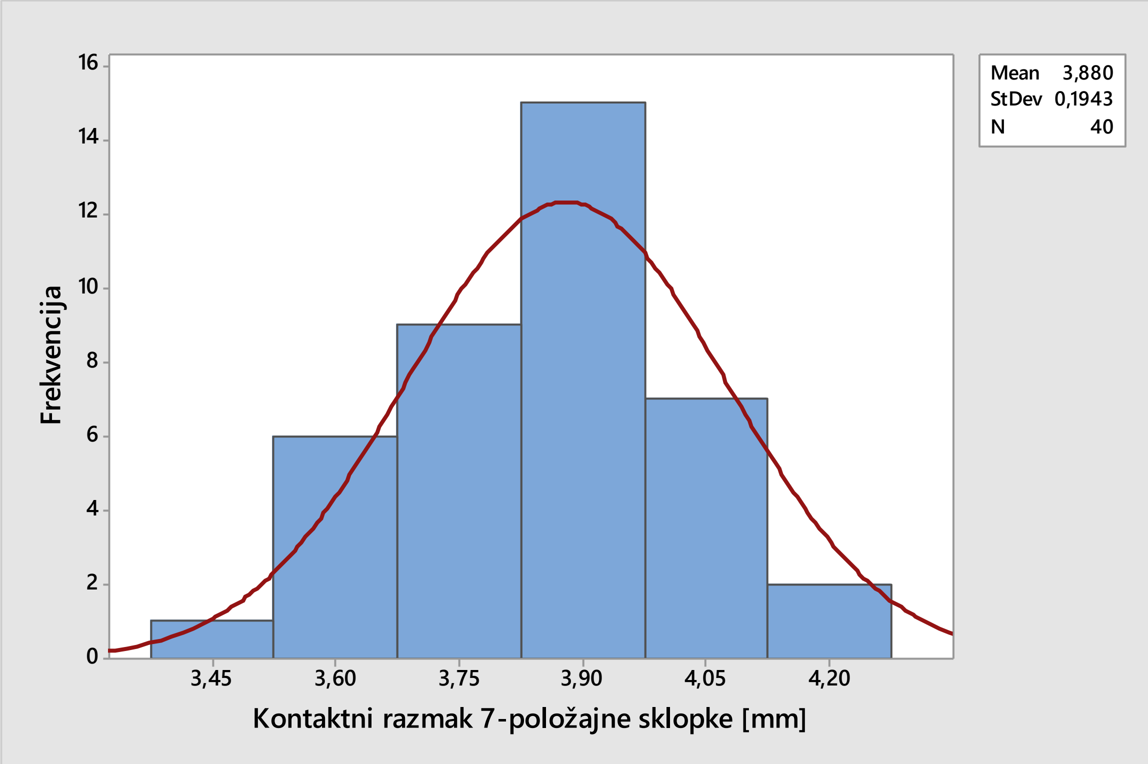


Slika 28. Histogram frekvencija kontaktnog razmaka 5-položajne sklopke

Tablica 10. Izračun χ^2 za kontaktni pritisak 5-položajne sklopke

Kontaktni razmak 5-položajne sklopke						
Razredi	x_i	t	f(t)	E_i	O_i	χ^2
3,45-3,633	3,541	-2,124	0,041	1,290	3	
3,633-3,816	3,724	-1,417	0,146	4,520	2	0,112926
3,816-3,999	3,907	-0,709	0,310	9,594	9	0,036777
3,999-4,182	4,090	-0,001	0,398	12,341	7	2,311505
4,182-4,365	4,273	0,705	0,310	9,620	15	
4,365-4,548	4,456	1,413	0,146	4,545	4	1,650351
					Suma	4,111559

Izračunati je χ^2 manji od $\chi^2_{0.05,3}$, što znači da se nulta hipoteza H_0 prihvaća.

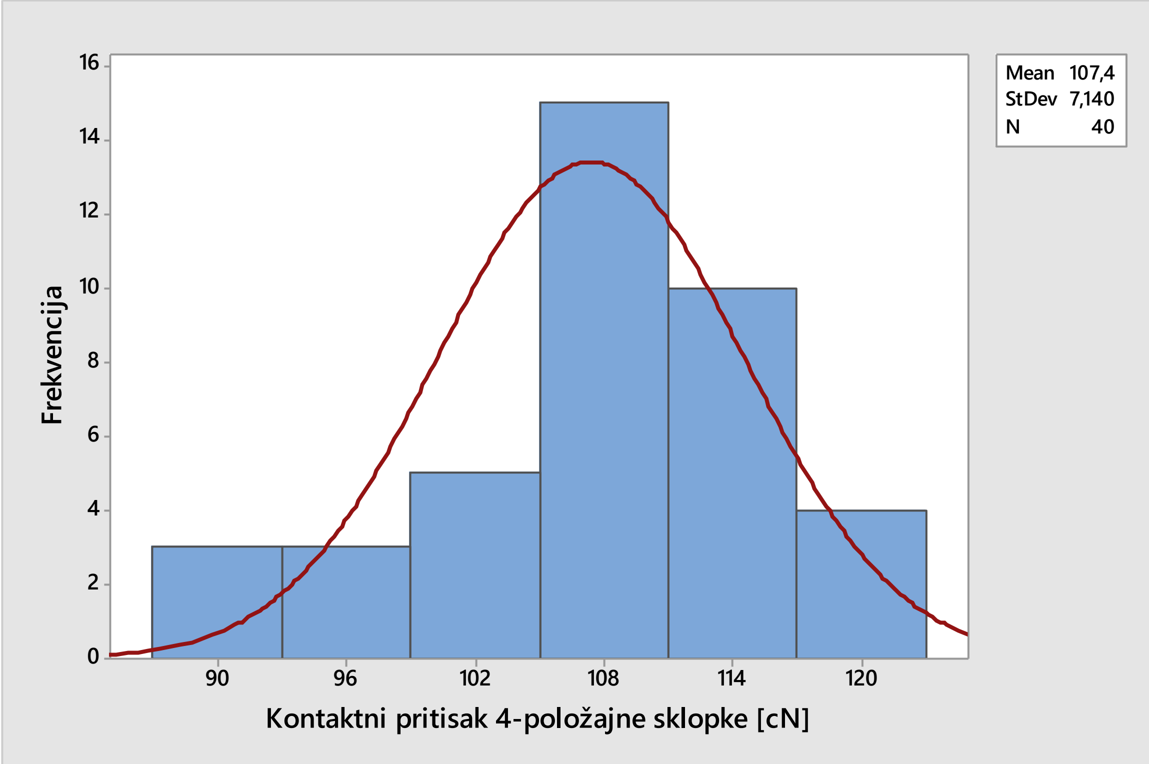


Slika 29. Histogram frekvencija kontaktnog razmaka 7-položajne sklopke

Tablica 11. Izračun χ^2 za kontaktni razmak 7-položajne sklopke

Kontaktni razmak 7-položajne sklopke						
Razredi	x_i	t	f(t)	E_i	O_i	χ^2
3,35-3,517	3,433	-2,356	0,024	0,964	1	
3,517-3,684	3,600	-1,470	0,135	5,259	6	0,097016
3,684-3,851	3,767	-0,583	0,336	13,071	9	1,267924
3,851-4,018	3,934	0,302	0,381	14,806	15	0,002542
4,018-4,185	4,101	1,188	0,196	7,644	7	
4,185-4,352	4,268	2,075	0,046	1,799	2	0,020782
					Suma	1,355264

Izračunati je χ^2 manji od $\chi^2{}_{0.05,3}$, što znači da se nulta hipoteza H_0 prihvaća.

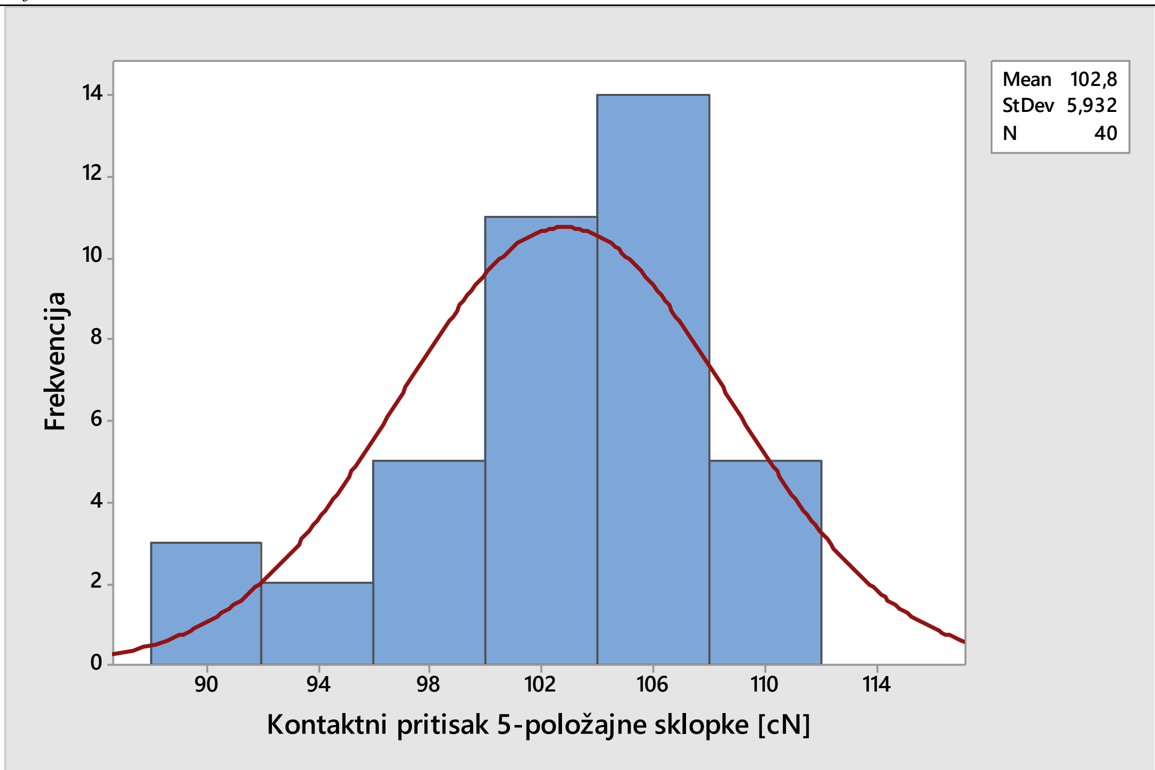


Slika 30. Histogram frekvencija kontaktnog pritiska 4-položajne sklopke

Tablica 12. Izračun χ^2 za kontaktni pritisak 4-položajne sklopke

Kontaktni pritisak 4-položajne sklopke						
Razredi	x_i	t	f(t)	E_i	O_i	χ^2
89-94,333	91,666	-2,221	0,033	1,246	3	
94,333-99,666	96,999	-1,484	0,132	4,879	3	0,002551
99,666-104,999	102,332	-0,748	0,301	11,106	5	3,357035
104,999-110,332	107,665	-0,011	0,398	14,693	15	0,006415
110,332-115,665	112,998	0,724	0,306	11,299	10	0,043491
115,665-120,998	118,331	1,461	0,137	5,050	4	0,218317
					Suma	3,627809

Izračunati je χ^2 manji od $\chi^2_{0.05,3}$, što znači da se nulta hipoteza H_0 prihvaća.

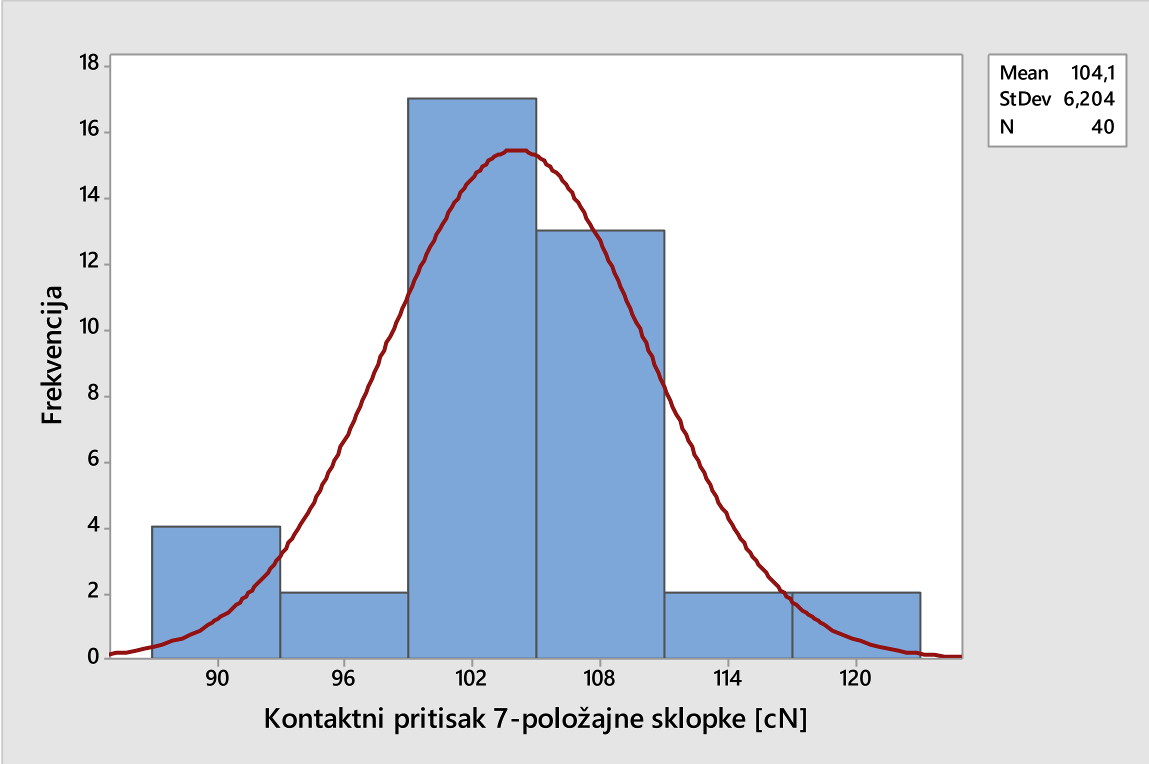


Slika 31. Histogram frekvencija za kontaktni pritisak 5-položajne sklopke

Tablica 13. Izračun χ^2 za kontaktni pritisak 5-položajne sklopke

Kontaktni pritisak 5-položajne sklopke						
Razredi	x_i	t	f(t)	E_i	O_i	χ^2
87-91,333	89,166	-2,235	0,032	0,954	3	
91,333-95,666	93,499	-1,507	0,128	3,729	2	
95,666-99,999	97,832	-0,779	0,294	8,576	5	0,801047
99,999-104,332	102,165	-0,051	0,398	11,605	11	0,031540
104,332-108,665	106,498	0,677	0,317	9,240	14	
108,665-112,998	110,831	1,405	0,148	4,329	5	2,173761
					Suma	3,006348

Izračunati je χ^2 manji od $\chi^2_{0.05,3}$, što znači da se nulta hipoteza H_0 prihvaća.



Slika 32. Histogram frekvencija za kontaktni pritisak 7-položajne sklopke

Tablica 14. Izračun χ^2 za kontaktni pritisak 7-položajne sklopke

Kontaktni pritisak 7-položajne sklopke						
Razredi	x_i	t	f(t)	E_i	O_i	hi cijeli
89-94,333	91,666	-1,735	0,088	2,774	4	
94,333-99,666	96,999	-0,951	0,253	7,958	2	2,086454
99,666-104,999	102,332	-0,167	0,393	12,341	17	1,758875
104,999-110,332	107,665	0,616	0,329	10,345	13	0,681394
110,332-115,665	112,998	1,401	0,149	4,688	2	
115,665-120,998	118,331	2,185	0,036	1,148	2	0,577604
					Suma	5,104327

Izračunati je χ^2 manji od ${\chi^2}_{0.05,3}$, što znači da se nulta hipoteza H_0 prihvaća.

Nakon provedenih χ^2 testova utvrđeno je kako se kontaktni razmaci i kontaktni pritisci sviju tipova sklopki ponašaju po normalnoj razdiobi.

8.1.4. Donja sposobnost procesa

Kako je potrebno zadovoljiti određeni, najmanji iznos vrijednosti kontaktnog razmaka i pritiska, u ovom će se poglavlju izračunati donje sposobnosti procesa za te vrijednosti. Donja granica kontaktnog razmaka iznosi L=3,2 mm kod svih triju sklopki. Ta vrijednost za kontaktni pritisak je L=40 cN. U donjoj je tablici prikazan kvantitativni odnos sigmi, postotka nesukladnih proizvoda i C_{pk} [Tablica 15].

Tablica 15. Odnos sigmi i C_{pk}

Granice specifikacije	Sukladnih %	Nesukladnih PPM	C_{pk}
+/- 1 sigma	30,23	697700	0,33
+/- 2 sigma	69,13	308700	0,67
+/- 3 sigma	93,32	66810	1,00
+/- 4 sigma	99,3790	6210	1,33
+/- 5 sigma	99,97670	233	1,67
+/- 6 sigma	99,999600	3,4	2,00

U prošlosti je zahtijevana sposobnost procesa koja se nastojala postići u granama industrijskog inženjerstva bila 0,67, to jest proces se kretao u granicama +/- 2 sigma. Tada se to smatralo dovoljno dobrim procesom. Vrijednost C_{pk} od 1 je postala standard 80-ih godina prošlog stoljeća. 90-ih se ta vrijednost popela na 1,33. U današnje vrijeme tvrtke svjetske klase (eng. *World Class Companies* - WCC) postižu vrijednost indeksa sposobnosti procesa od 2,00. Taj je koncept predstavljen u tvrtki Motorola davne 1983. godine, a danas je znak za provođenje izrazito kvalitetnih procesa, s vrlo malom varijabilnošću [36].

Donja sposobnost procesa za kontaktni razmak kod 4 - položajne sklopke prikazana je u donjoj jednadžbi:

$$C_{pL} = \frac{(\bar{x} - L)}{3\sigma} = \frac{3{,}7150 - 3{,}2}{3 * 0{,}3161} = 0{,}543 \tag{8.5}$$

Kako je iznos u gornjoj jednadžbi manji od jedan, proces je nesukladan. Potrebno ga je unaprijediti s obzirom na zahtijevanu donju granicu iznosa kontaktnog razmaka. Prema navedenim vrijednostima u tablici spada u kategoriju između +/- 1 i +/-2 sigma, što je izrazito nepovoljno.

Donja sposobnost procesa za kontaktni razmak kod 5 - položajne sklopke prikazana je u donjoj jednadžbi:

$$C_{pL} = \frac{(\bar{x} - L)}{3\sigma} = \frac{4{,}0910 - 3{,}2}{3 * 0{,}2586} = 1{,}148 \tag{8.6}$$

Vrijednost je između 1 i 1,33, iz čega se zaključuje da je sposobnost procesa upitna, te ga je potrebno i dalje nadzirati u cilju poboljšanja. Spada u područje između +/- 3 i +/- 4 sigma što znači da je prisutnost defektnih proizvoda prevelika za današnji standard.

Donja sposobnost procesa za kontaktni razmak kod 7 - položajne sklopke prikazana je u donjoj jednadžbi:

$$C_{pL} = \frac{(\bar{x} - L)}{3\sigma} = \frac{3{,}8775 - 3{,}2}{3 * 0{,}1884} = 1{,}199 \tag{8.7}$$

Isto kao i kod 5 - položajne sklopke, sposobnost je između vrijednosti 1 i 1,33, pa je potrebno daljnje unaprjeđenje procesa u vidu postizanja većih vrijednosti kontaktnog razmaka. Proces se nalazi u području između +/- 3 i +/- 4 sigma, što pokazuje da će udio nesukladnih proizvoda u milijun proizvedenih biti prevelik.

Donja sposobnost procesa za kontaktni pritisak kod 4 - položajne sklopka računa se kao:

$$C_{pL} = \frac{(\bar{x} - L)}{3\sigma} = \frac{107{,}75 - 40}{3 * 7{,}24} = 3{,}12 \tag{8.8}$$

Iznos od 3,12 ukazuje na to da je proces izrazito sposoban, u smislu postizanja što većeg iznosa kontaktnog pritiska. Prema prije navedenoj tablici proces rezultira minimalnim brojem nesukladnih proizvoda u milijun proizvedenih dijelova.

Donja sposobnost procesa za kontaktni pritisak kod 5 - položajne sklopke računa se prema sljedećem izrazu:

$$C_{pL} = \frac{(\bar{x} - L)}{3\sigma} = \frac{102{,}47 - 40}{3 * 5{,}95} = 3{,}499 \tag{8.9}$$

Vrlo visoka vrijednost je dokaz kako je proces s lakoćom ostvario zahtijevanu donju granicu u iznosu od 40 cN, te je proces sposoban. Broj nesukladnih proizvoda je kao i kod 4-položajne sklopke izrazito zadovoljavajući, to jest malen.

Donja sposobnost procesa za kontaktni pritisak kod 7 - položajne sklopke računa se kao:

$$C_{pL} = \frac{(\bar{x} - L)}{3\sigma} = \frac{103{,}47 - 40}{3 * 6{,}80} = 3{,}111 \tag{8.10}$$

Kao i kod prethodne dvije sklopke, C_{pL} je vrlo visok, što ukazuje na to da su u svim slučajevima zadovoljene donje tražene granice iznosa kontaktnog pritiska, to jest proces je sposoban. Također ga karakterizira izrazito malen broj nesukladnih proizvoda u milijun proizvedenih.

U sljedećoj je tablici prikazan odnos izračunatih donjih indeksa sposobnosti procesa s minimalnim zahtijevanim vrijednostima s obzirom na vrstu procesa [Tablica 16].

Tablica 16. Usporedba C_p s WCC

	Tip sklopke	Izračunati C_p procesa	Nesukladnih PPM	Postojeći proces C_p=min1,25	Novi proces C_p=min1,45	Postojeći kritični proces C_p=min1,45	Novi kritični proces C_p=min1,6
Kontaktni razmak	4 položaja	0,543	51551	<	<	<	<
	5 položaja	1,148	280	<	<	<	<
	7 položaja	1,199	159	<	<	<	<
Kontaktni pritisak	4 položaja	3,12	0,00	>	>	>	>
	5 položaja	3,499	0,00	>	>	>	>
	7 položaja	3,111	0,00	>	>	>	>

Ovakve vrijednosti indeksa sposobnosti procesa navedene kao minimalne u gornjoj tablici ostvaruju tvrtke svjetske klase. Kritični procesi su u najvećem broju slučajeva oni povezani sa sigurnosti zaposlenika.

Uspoređujući rezultate analize s vrijednostima koje ostvaruju WCC, može se zaključiti kako kontaktni razmak svih tipova sklopka ne zadovoljava nijednu od minimalnih vrijednosti C_p, dok kontaktni pritisak neovisno o vrsti procesa ima izrazito dobre vrijednosti indeksa sposobnosti procesa. Potrebno je pratiti i unaprijediti dio proizvodnje u kojem se vrše procesi koji će odrediti postojeću vrijednost kontaktnog razmaka.

8.1.5. ANOVA

Potrebno je provesti ANOVA analizu kontaktnog pritiska kod 4, 5 i 7 - položajne sklopke, kako bi se utvrdilo utječe li tip sklopke (broj položaja) na iznos kontaktnog pritiska. Pretpostavka je da broj položaja sklopke ne utječe na kontaktni razmak: Ostale pretpostavke su sljedeće:

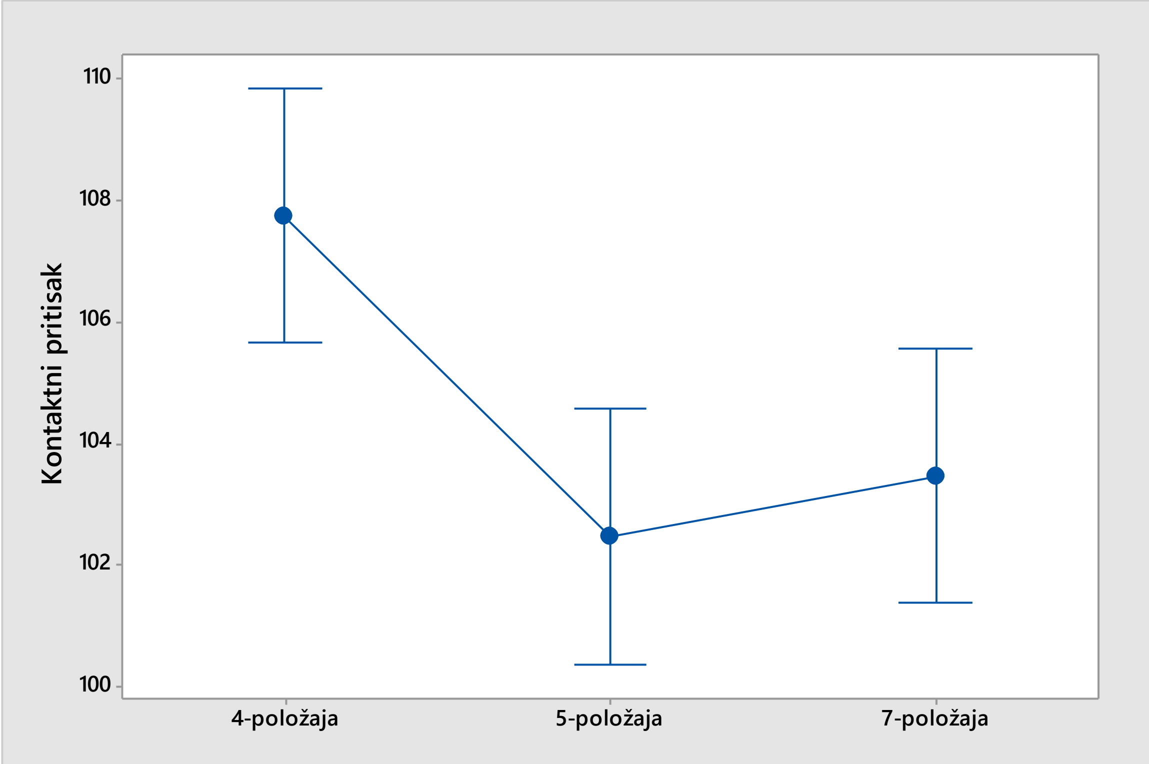
1. H_0: $\Delta\bar{x}_1 = \Delta\bar{x}_2 = \cdots = \Delta\bar{x}_k = 0$
   H_a: bar jedan $\Delta\bar{x}_1 \neq 0$
2. značajnost testiranja je $\alpha = 0{,}05$
3. ukoliko je parametar testa $f_{rač} > f_{0,05,2,117}$ pretpostavka H_0 se odbacuje uz pogrešku prve vrste vjerojatnosti α.

Analiza je provedena u Minitab softwareu na 40 nasumično odabranih uzoraka svake vrste sklopke. Rezultati su prikazani u donjoj tablici [Tablica 17].

Tablica 17. ANOVA analiza 4, 5 i 7-položajnih sklopki

izvor varijacije	suma kvadrata odstupanja	stupnjevi slobode	srednji kvadrat odstupanja	$f_{rač}$	$f_{0.05,2,117}$
faktor: kontaktni pritisak	628,0	2	314,01	7,02	3,07
slučajno odstupanje u uzorcima	5233,4	117	44,73		
UKUPNO	5861,5	119			

Prema rezultatima provedene ANOVE, $f_{rač} > f_{0.05,2,117} = 3{,}07$, to jest odbacuje se nulta hipoteza H_0 da broj položaja sklopke ne utječe na iznose kontaktnog pritiska. Na donjoj je slici prikaz aritmetičke sredine triju tipova sklopki s intervalom točnosti u iznosu od 95%, što znači da će se u 95% mjerenja uzoraka dobiti stvarna aritmetička sredina za svaki pojedini tip sklopke [Slika 33].



Slika 33. 95%-tni interval točnosti aritmetičke sredine

Iz gornje je slike vidljivo kako se aritmetičke sredine kontaktnih pritisaka svih tipova sklopki razlikuju, ali aritmetička sredina 4-položajne sklopke znatno odskače od ostale dvije. To je pouzdan znak za to da vrijednost kontaktnog pritiska sklopke ovisi u broju položaja sklopke, to jest o tipu sklopke.

9. ZAKLJUČAK

Kako histogramski prikaz frekvencije podataka nije dovoljno pouzdan način za donošenje odluke o vrsti raspodjele podataka, provedena je dodatna analiza primjenom χ^2 testa.
Na temelju provedenog χ^2 testa donesen je zaključak kako su vrijednosti kontaktnog razmaka i kontaktnog pritiska normalno distribuirane kod svih tipova sklopki. Primjenom statističkih parametara određeni su indeksi donje potencijalne sposobnosti procesa C_{pL}, te je na temelju njih vidljivo kako su procesi izrazito sposobni kod postizanja tražene minimalne vrijednosti kontaktnog pritiska, dok kod dijela procesa proizvodnje koji je odgovoran za postizanje odgovarajuće minimalne granice kontaktnog razmaka još uvijek ima puno prostora za unaprjeđenje. Uspoređujući rezultate analize s minimalnim zahtijevanim indeksima sposobnosti procesa kod tvrtki svjetske klase, dolazi se do zaključka kako u slučaju kontaktnog razmaka proizvodnja ne zadovoljava niti jedan kriterij, bez obzira radilo se o postojećem procesu, koji ima najmanji iznos vrijednosti indeksa C_p od 1,25, ili o novom kritičnom procesu, čija se sposobnost penje i iznad 1,6. S obzirom na kontaktni pritisak, proučavana tvrtka ostvaruje iznimno dobre rezultate, te bi mogla konkurirati WCC u tom području. Unatoč tome, niske vrijednosti indeksa sposobnosti procesa C_p su prepreka u probijanju na svjetsko tržište. Iako su ti indeksi izrazito visoki u slučaju kontaktnog pritiska, oni ne mogu nadoknaditi loše strane proizvodnje uzrokovane preniskim iznosima kontaktnog razmaka. Proizvodnja bi se trebala dovesti na iznos sposobnosti procesa od najmanje 1,6, te bi tako postala konkurencija proizvodnim sustavima tvrtki svjetske klase.
Analizom varijance zaključeno je kako broj položaja sklopke svakako utječe na iznose kontaktnih pritisaka, te je potrebno provesti daljnju analizu u cilju otkrivanja parova između koji je prisutna značajna razlika vrijednosti tog parametra.

10. LITERATURA

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Statistics

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Descriptive_statistics

[3] http://matematika.fkit.hr/novo/statistika_i_vjerojatnost/predavanja/1%20-%20Deskriptivna%20statistika.pdf

[4]http://www.seminarskirad.biz/seminarski/Faze%20statisti%C4%8Dkog%20istra%C5%BEivanja%20-%20seminarski.pdf

[5] Koceić Bilan, Nikola. Primijenjena statistika. Split: Prirodoslovno-matematički fakultet u Splitu, 2011.

[6] Cajner, Hrvoje. Osnove statistike. Inženjerska statistika. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2013.

[7] Cajner, Hrvoje. Raspodjele podataka. Inženjerska statistika. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2013.

[8] Cajner, Hrvoje. Analiza varijance. Inženjerska statistika. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2013.

[9] Sušić, Velimir. Statistički niz i njegova analiza - II.

[10] Lulić, Ivan. Završni rad. Fakultet strojarstva i brodogradnje, 2014.

[11] https://statistics.laerd.com/statistical-guides/descriptive-inferential-statistics.php

[12] http://www.socialresearchmethods.net/kb/statrpd.php

[13] Oakland, John. Statistical process control. Linacre House, Jordan Hill, Oxford OX2 8DP, UK, 2008.

[14] R. Thompson, James; Koronacki, Jacek. Statistical process control. Washington, D.C., 2002.

[15] http://www.infinityqs.com/resources/what-is-spc

[16] http://en.wikipedia.org/wiki/Statistical_process_control

[17] Stewar, John. Variation in Manufacturing. 2014.

[18] Kovačić, Goran; Kondić, Živko. Statistička analiza sposobnosti procesa proizvodnje stretch folije.

[19] http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section1/pmc16.htm

[20] http://en.wikipedia.org/wiki/Six_Sigma

[21] http://www.isixsigma.com/new-to-six-sigma/getting-started/what-six-sigma/

[22] http://www.6sigma.us/six-sigma.php

[23] Markučić, Damir. Kontrola kvalitete. Fakultet strojarstva i brodogradnje.

[24] http://stattrek.com/chi-square-test/independence.aspx

[25] http://stattrek.com/chi-square-test/goodness-of-fit.aspx?Tutorial=AP

[26] http://stattrek.com/chi-square-test/homogeneity.aspx?Tutorial=AP

[27]http://www.graphpad.com/guides/prism/6/statistics/index.htm?interpreting_results_kolmogorov-smirnov_test.htm

[28] http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda35g.htm

[29] http://www.real-statistics.com/non-parametric-tests/two-sample-kolmogorov-smirnov-test/

[30] http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda35e.htm

[31] C. Montgomery, Douglas. Design and Analysis of Experiments, Seventh Edition, 2008.

[33] Grubešić, Nikola. Diplomski rad. Fakultet strojarstva i brodogradnje. 2014.

[34] Cukor, Ivana. Seminarski rad. Fakultet strojarstva i brodogradnje. 2014.

[35] https://images.google.com/

[36] R. Bhote, Keki. The Ultimate Six Sigma: Beyond Quality Excellence to Total Business Excellence, 2001.

[37] Za statističku analizu i grafičke prikaze korištena je TRIAL verzija programa Minitab

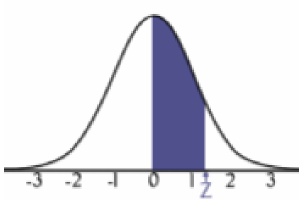
11. PRILOZI

I. CD-R Disc

II. Tablica normalne distribucije

III. Tablica χ^2 distribucije

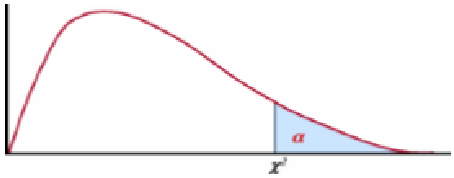
Jedinična normalna (Gaussova) distribucija



Površine ispod krivulje jedinične normalne distribucije između 0 i z

z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

χ^2 - distribucija



Granične vrijednosti varijable χ^2 za pripadne površine ispod krivulje i k stupnjeva slobode

k	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,455	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,828
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	1,386	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,816
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	2,366	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	3,357	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	4,351	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	5,348	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,458
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	6,346	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	7,344	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,124
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	8,343	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	9,342	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	10,341	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	11,340	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	12,340	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	13,339	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	14,339	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	15,338	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	16,338	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	17,338	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	18,338	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	19,337	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	20,337	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	21,337	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	22,337	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	23,337	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	24,337	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	25,336	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	26,336	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	27,336	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,892
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	28,336	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,301
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	29,336	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703
35	18,509	20,027	22,465	24,797	27,836	34,336	41,778	46,059	49,802	54,244	57,342	66,619
40	22,164	23,838	26,509	29,051	32,345	39,335	47,269	51,805	55,758	60,436	63,691	73,402
45	25,901	27,720	30,612	33,350	36,884	44,335	52,729	57,505	61,656	66,555	69,957	80,077
50	29,707	31,664	34,764	37,689	41,449	49,335	58,164	63,167	67,505	72,613	76,154	86,661
60	37,485	39,699	43,188	46,459	50,641	59,335	68,972	74,397	79,082	84,580	88,379	99,607
70	45,442	47,893	51,739	55,329	59,898	69,334	79,715	85,527	90,531	96,388	100,425	112,317
80	53,540	56,213	60,391	64,278	69,207	79,334	90,405	96,578	101,879	108,069	112,329	124,839
90	61,754	64,635	69,126	73,291	78,558	89,334	101,054	107,565	113,145	119,648	124,116	137,208
100	70,065	73,142	77,929	82,358	87,945	99,334	111,667	118,498	124,342	131,142	135,807	149,449
500	429,388	437,219	449,147	459,926	473,210	499,334	526,401	540,930	553,127	567,070	576,493	603,446